

Mécanique des Fluides en 13 chapitres :

1. Descriptions microscopique et cinématique des fluides
2. Théorème de transport
3. Contraintes dans un fluide
4. Hydrostatique
5. Tension de surface
6. Fluides parfaits
7. Fluides visqueux
8. Ecoulements inertiels vs visqueux
9. Ecoulements parallèles
10. Ecoulements faiblement non-parallèles
11. Ecoulements de fluides non-newtoniens
12. Ondes de surface
13. Eléments d'instabilités et de turbulence

Bibliographie

Ouvrage de base (niveau Licence)

"Mécanique des Fluides", D. Salin & J. Martin (Dunod 1997, Collection 128, 128 pages)

Ouvrage de référence (niveau Master et plus)

"Hydrodynamique Physique", E. Guyon, J.-P. Hulin & L. Petit, (CNRS Editions, 500-700 pages)

Ouvrage de vulgarisation

"Ce que disent les fluides", E. Guyon, J.-P. Hulin & L. Petit, (Belin/Pour la Science, 2005)

Ouvrage photographique

"An Album of Fluid Motion", H. Van Dyke, (Parabolic Press, 1982)

Ouvrage multimédia

"Mécanique des fluides multimédia" CD-ROM (Elsevier-Gauthier-Villard, 2001)

Ouvrage vidéo

Anciens (~1960) films pédagogiques de la NFS maintenant disponibles sur le site du MIT
<http://web.mit.edu/fluids/www/Shapiro/ncfmf.html>.



Quelques écoulements de fluides

© Multimedia Fluid Mechanics



Tourbillon cyclonique dans l'atmosphère
Dorian (01/09/2019)



La tâche rouge de Jupiter



Tourbillon de sillage d'aile d'avion



Filet et étalement de miel sur une tartine



Gouttes de pluie sur une vitre

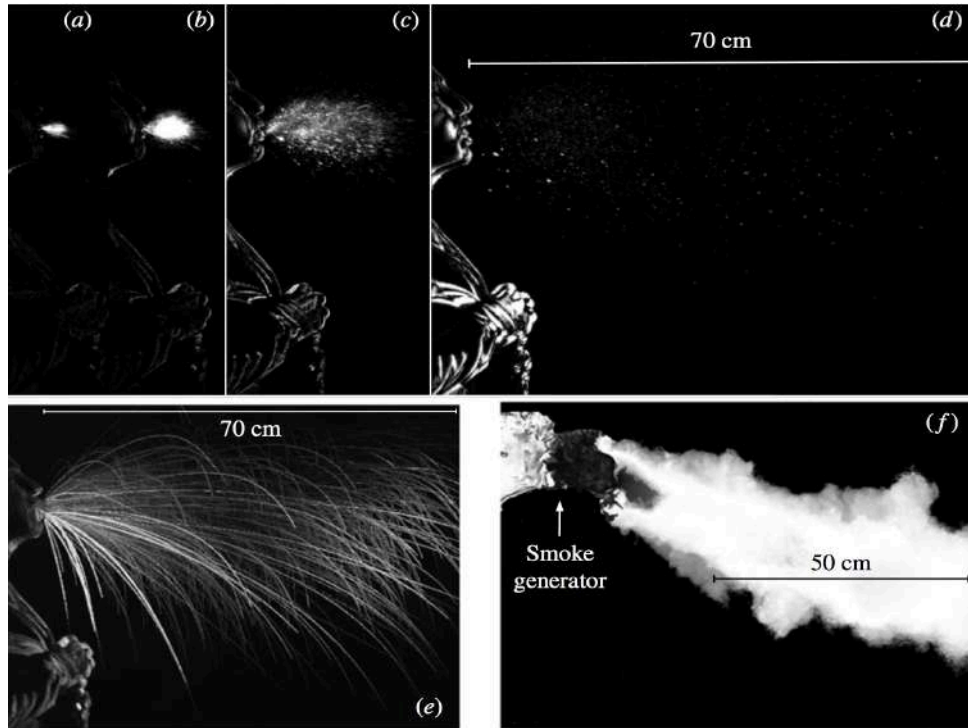


Insecte marchant sur l'eau

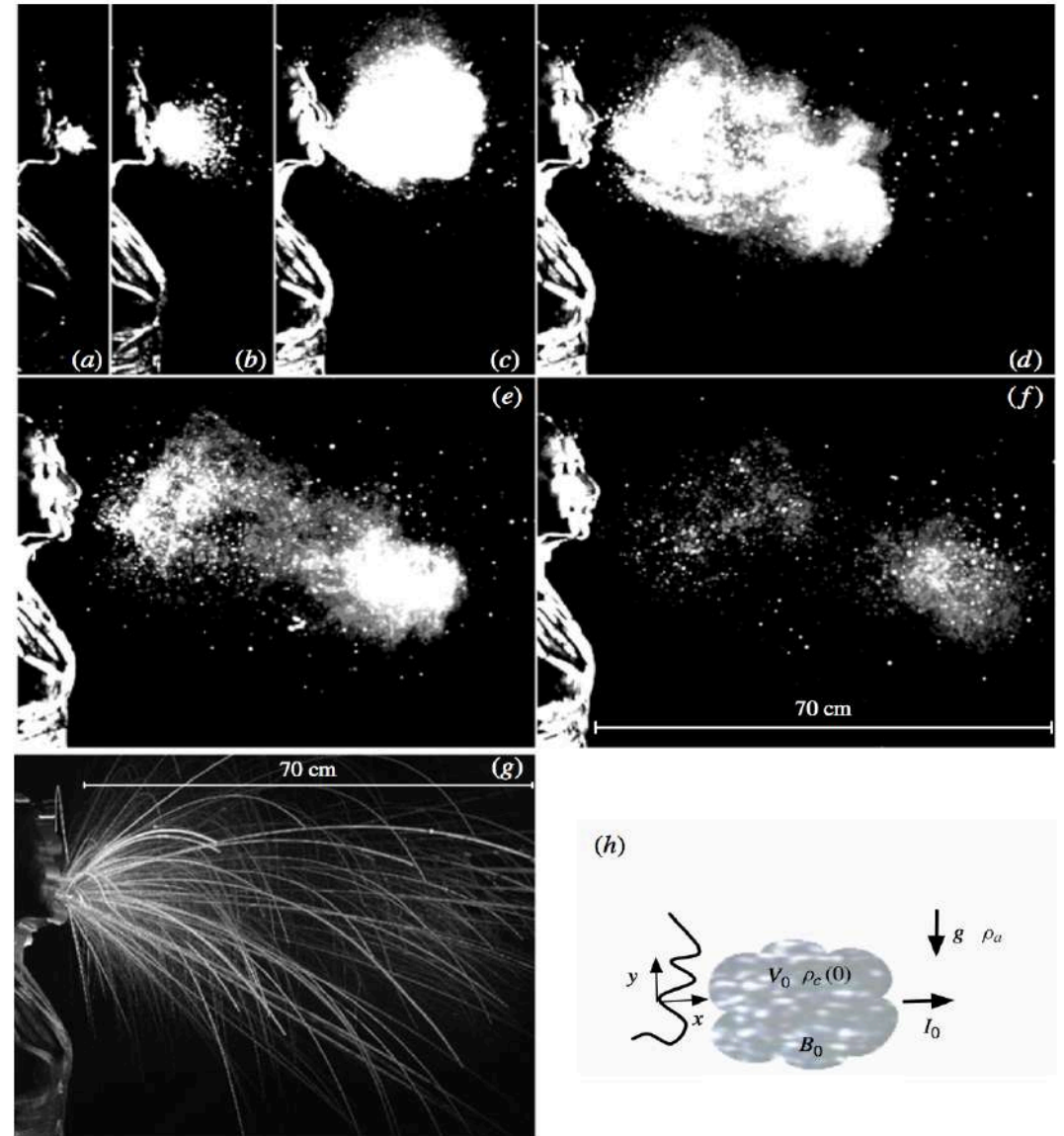
“Violent expiratory events: on coughing and sneezing”

by Lydia Bourouiba, Eline Dehandschoewercker & John W. M. Bush (MIT, USA)
in Journal of Fluid Mechanics, vol. 745, pp. 537–563 (2014)

toux



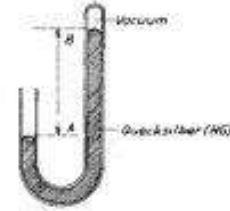
éternuement



Quelques grands scientifiques
ayant contribué
en Mécanique des Fluides



Léonard de Vinci (~1500)



Pascal (~1650)



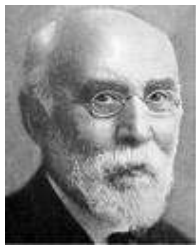
Euler (~1780)



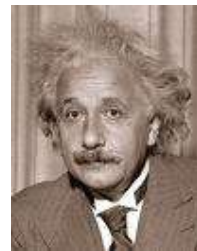
Kelvin (~ 1880)



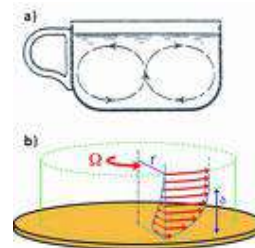
Helmholtz (~1880)



Lorentz (~1905)



Einstein (~1905)



Pierre-Gilles de Gennes (~1980)



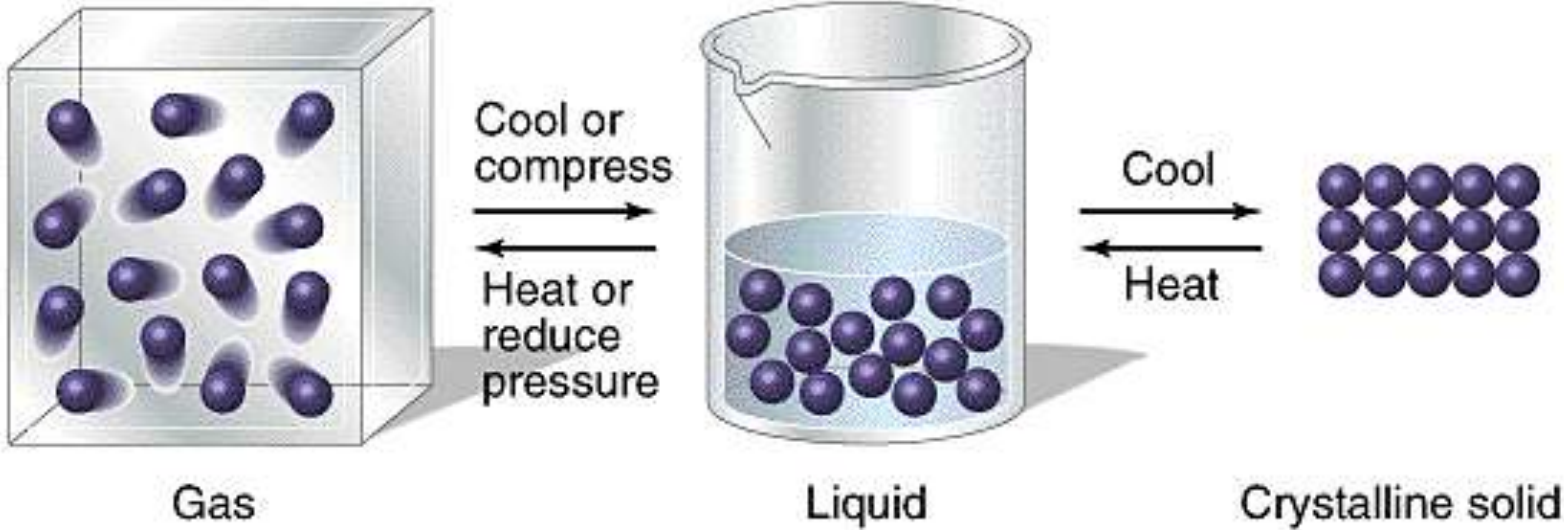
Chapitre I

Description microscopique et cinématique des fluides

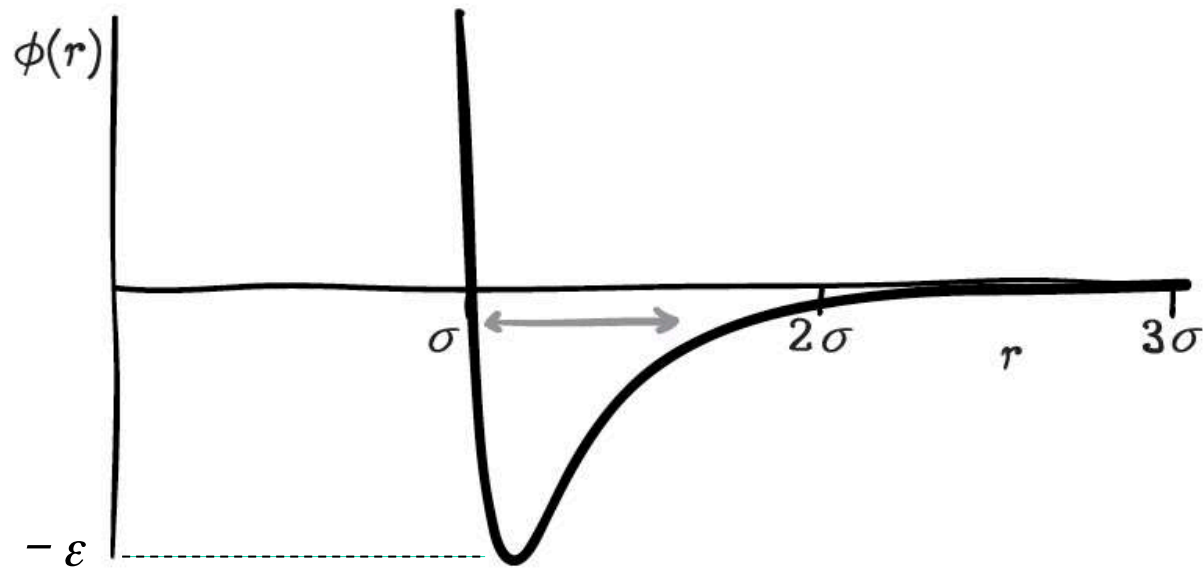
Qu'est-ce qu'un fluide ?

gaz
liquide fluide \neq solide

milieux dilués vs condensés



potentiel interatomique
Lennard-Jones



gaz

$$\epsilon \ll kT$$

liquide

$$\epsilon \sim kT$$

solide

$$\epsilon \gg kT$$

1. Paramètres physiques d'un fluide

Masse volumique

ρ (kg/m³)

Viscosité

η (Pa s)

Viscosité cinématique

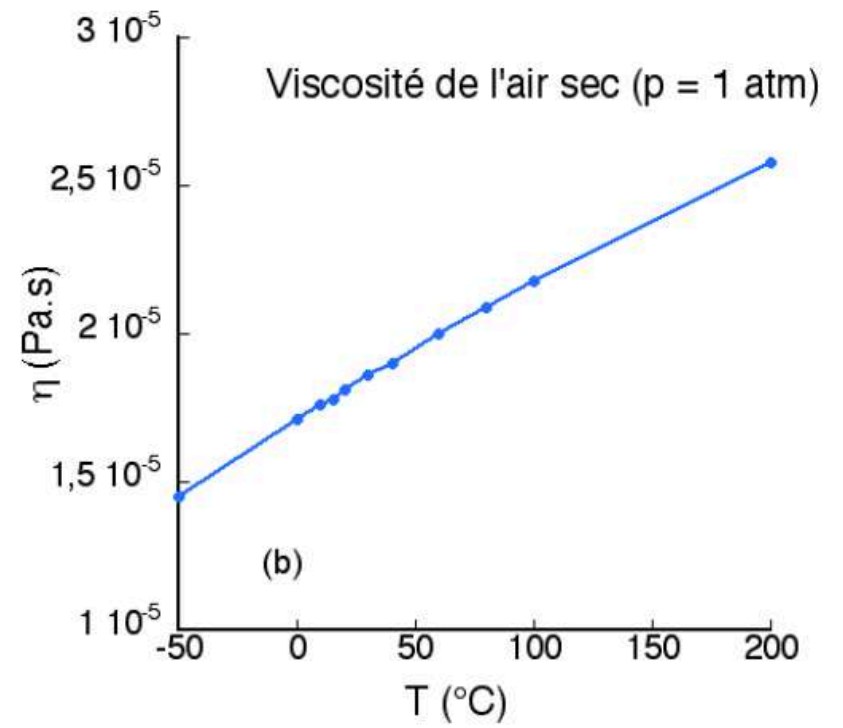
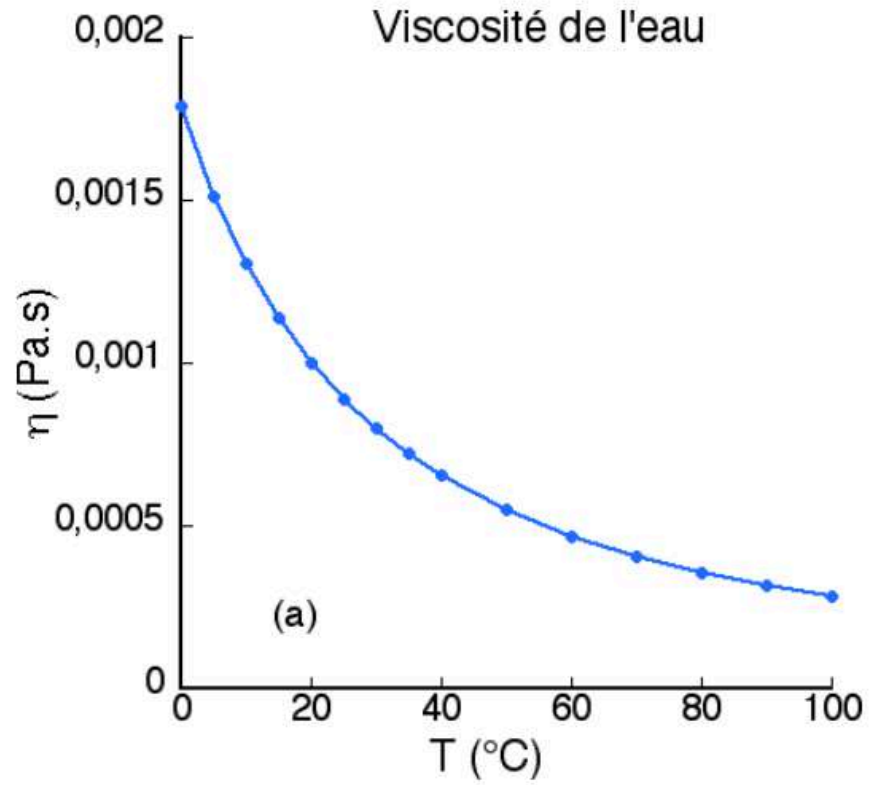
$\nu = \eta/\rho$ (m²/s)

Tension (énergie) de surface d'un liquide

γ (N/m ou J/m²)

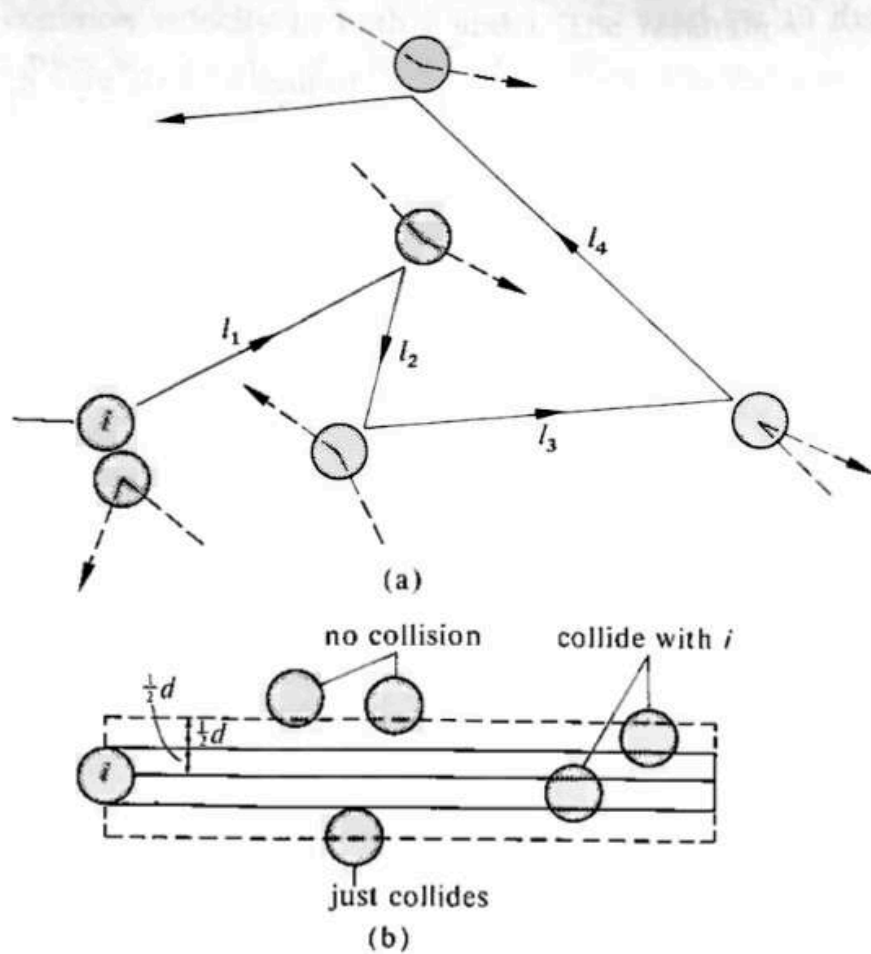
	eau	air
ρ (kg/m ³)	1000	1,29
η (Pa.s)	10 ⁻³	1,85 10 ⁻⁵
ν (m ² /s)	10 ⁻⁶	1,4 10 ⁻⁵
γ (N/m)	7 10 ⁻²	

Viscosité



Processus de transport dans les gaz (pression p , température T , masse moléculaire m)

$p = nk_B T$ pour les gaz parfaits
avec n la densité moléculaire (nombre de molécules/unité de volume)



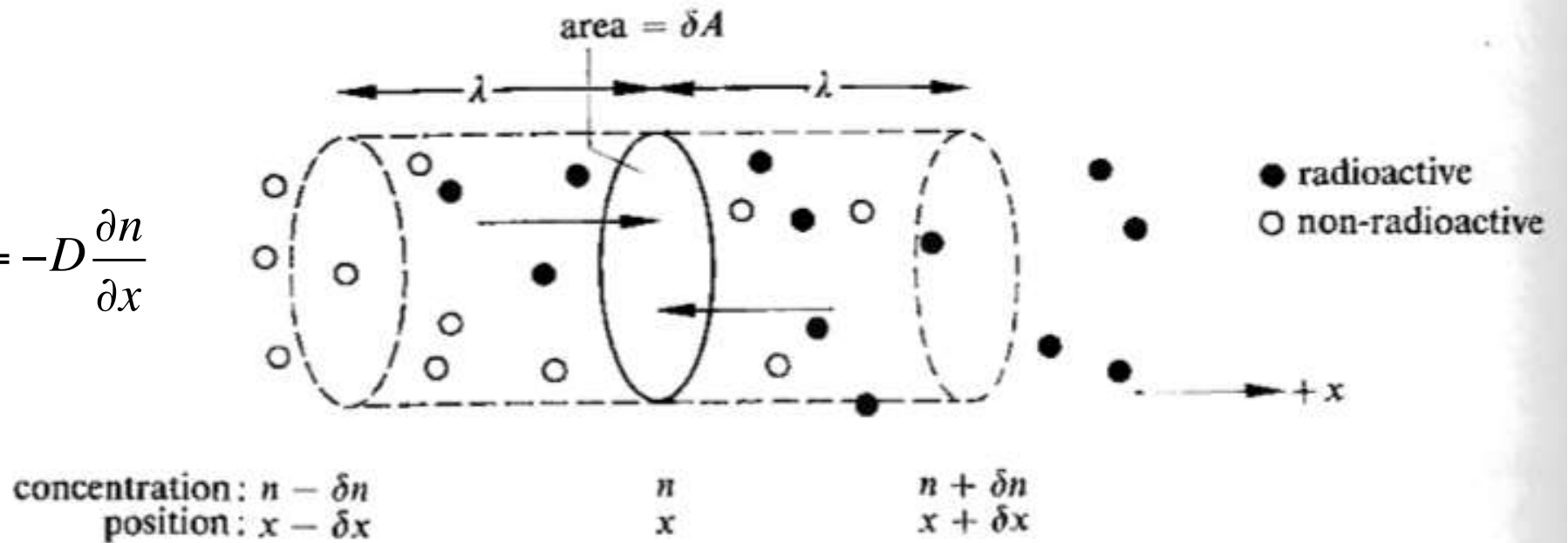
libre parcours moyen

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

Fig. 5.22. (a) Showing the path followed by atom i as it collides with other atoms of the gas. (b) Atom i will collide with all other atoms whose centres lie within a cylinder of radius d and of length $\bar{u}t$. The cylinder is shown here as a section through a diameter.

Diffusion moléculaire sous gradient de concentration

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

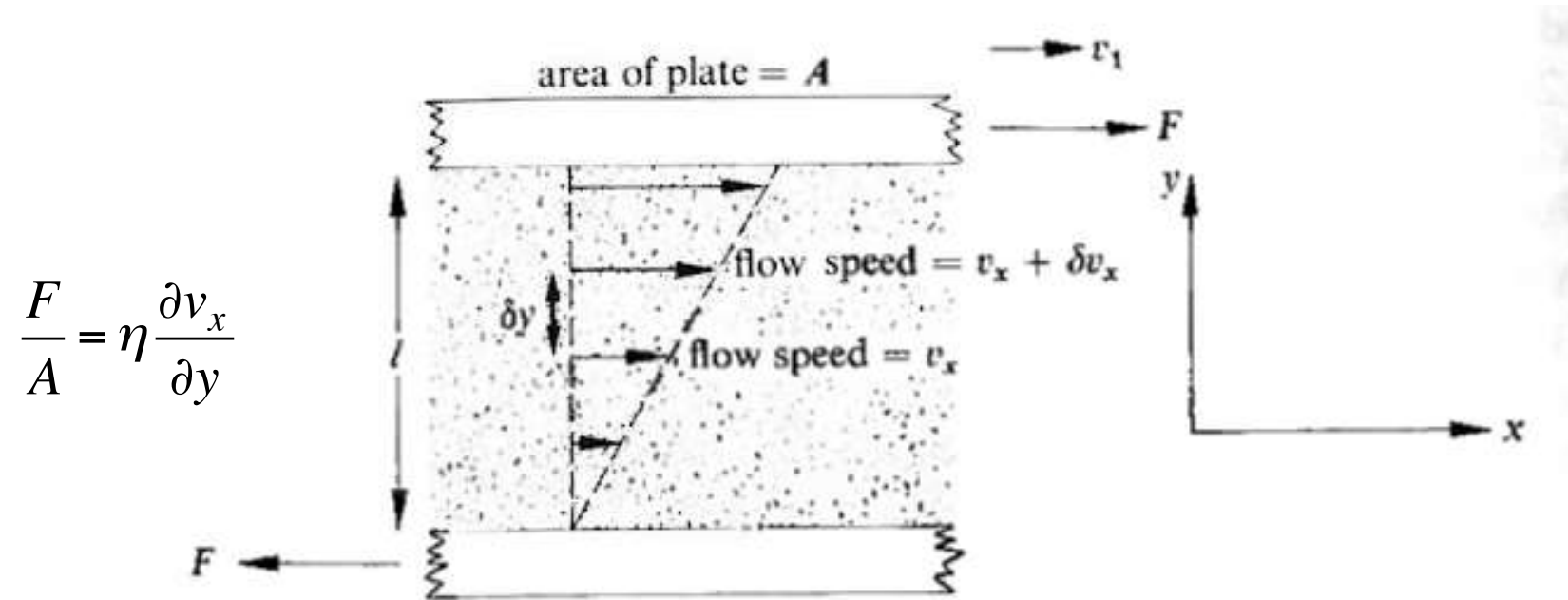


Coefficient de diffusion moléculaire $D = \frac{1}{3} \lambda \bar{u}$

avec $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$ libre parcours moyen

$\bar{u} = \left(\frac{8 k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}$ vitesse moyenne

Diffusion de quantité de mouvement sous gradient de vitesse



$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Coefficient de viscosité dynamique η ?

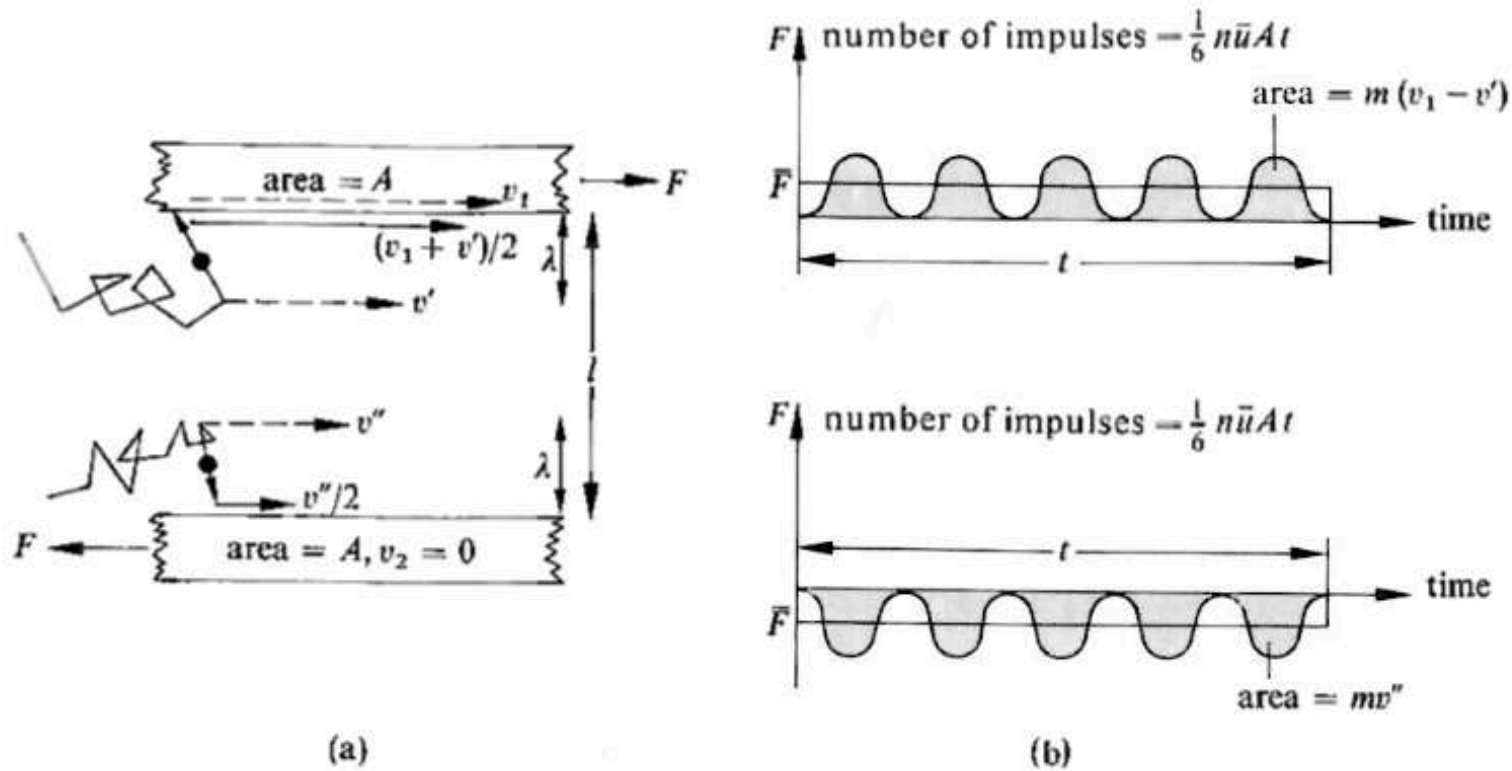


Fig. 7.8. An atom diffusing to the top plate will gain tangential momentum $m(v_1 - v')$. (b) Shows the series of impulses required to keep the top plate moving with speed v_1 , and to keep the lower plate stationary.

$$\frac{1}{3} n\bar{u}A\Delta t [mv_x(x + \lambda) - mv_x(x - \lambda)] = F\Delta t$$

$$\frac{1}{3} n\bar{u}m \frac{\partial v_x}{\partial y} \lambda = \frac{F}{A}$$

$$\eta = \frac{1}{3} nm\lambda\bar{u} \quad \text{coefficient de viscosité dynamique}$$

coefficient de viscosité dynamique $\eta = \frac{1}{3} nm\lambda\bar{u} = \frac{1}{3} \frac{m\bar{u}}{\pi d^2}$

avec $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$ libre parcours moyen

$\bar{u} = \left(\frac{8k_B T}{\pi m}\right)^{1/2}$ vitesse moyenne

La viscosité dynamique d'un gaz augmente avec la température ($\eta \sim T^{1/2}$) et est indépendante de la pression, tout au moins dans une très large gamme.

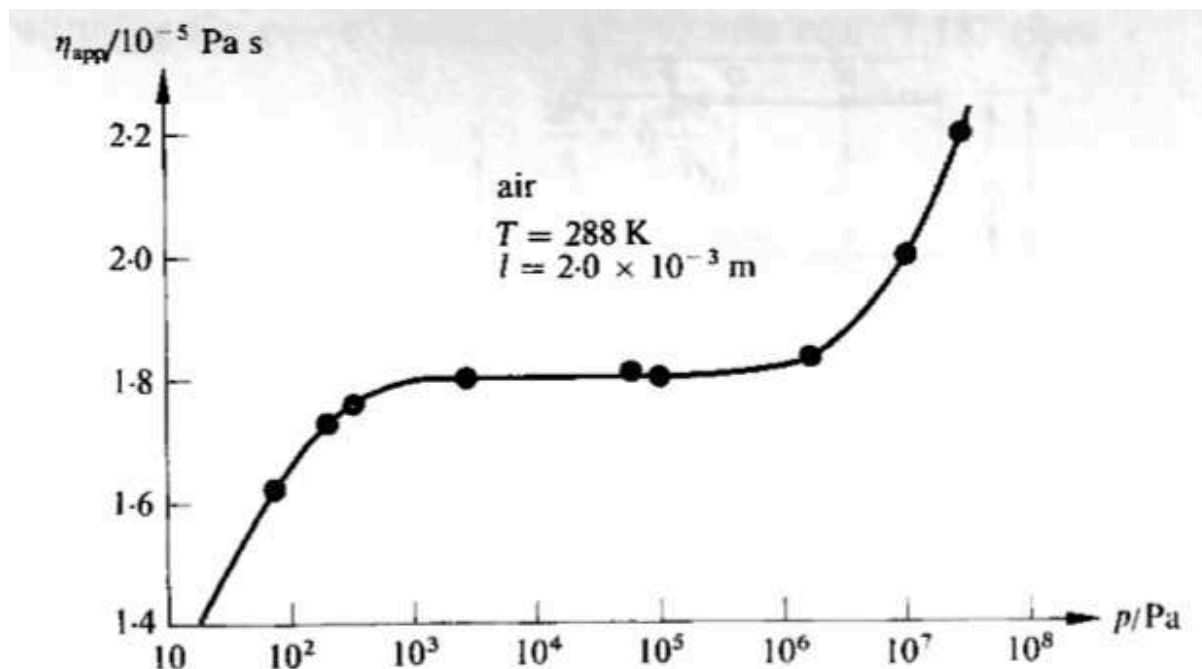


Fig. 7.10. Shows how the apparent viscosity of air depends on its pressure.

A très faible pression, le libre parcours moyen λ devenu grand n'est plus négligeable comparé à la distance l de la cellule de mesure. La viscosité apparente est alors

$$\eta_{app} = \frac{\eta}{1 + \frac{2\lambda}{l}} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

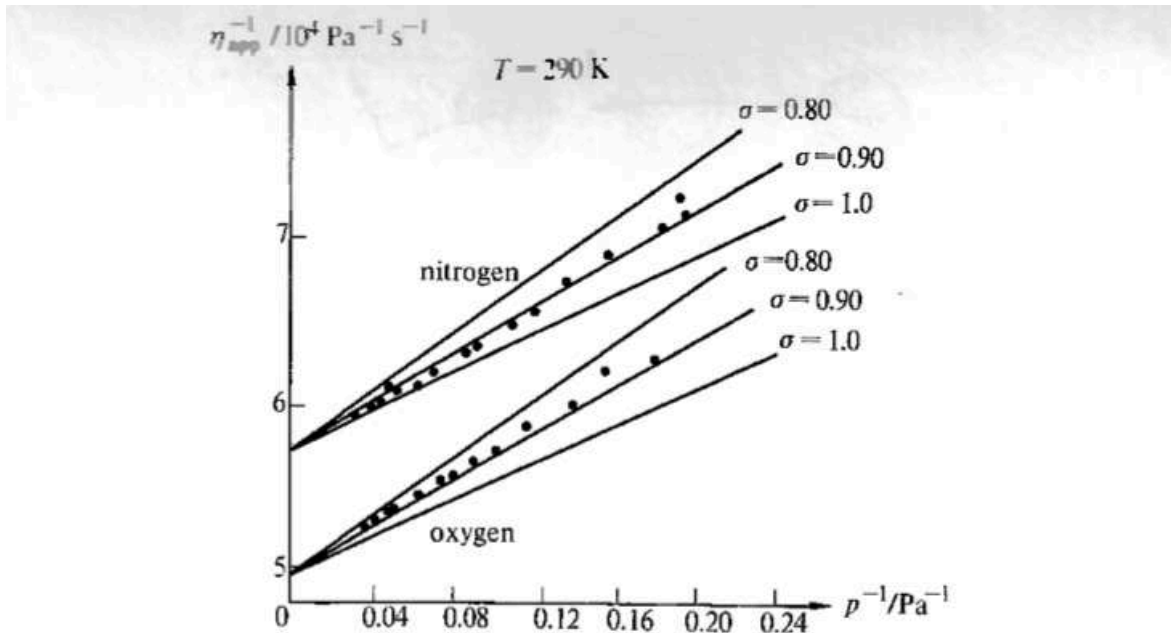


Fig. 7.11. Showing how η_{app}^{-1} varies with p^{-1} for N_2 and O_2 maintained at 290 K. The lines labelled $\sigma = 0.8$, $\sigma = 0.9$, and $\sigma = 1.0$ show the behaviour to be expected at these different values of σ . The walls of the viscometer were made of aluminium. (Data from Hurlbut, F. C. (1960). *Phys. Fluids* 3, 541.)

Dans ce graphe, il est tenu compte de la possibilité que toutes les molécules ne prennent pas la vitesse de la paroi lors de leur collision avec elle (fraction $\sigma \leq 1$) :

$$\eta_{app} = \frac{\eta}{1 + \frac{2\lambda}{l} \frac{2 - \sigma}{\sigma}}$$

La viscosité apparente décroît alors avec la pression ($\eta \sim p$)

A très haute pression peut se faire sentir un effet de covolume : le diamètre moléculaire d n'est plus négligeable comparé au libre parcours moyen λ devenu faible ($\lambda \rightarrow \lambda + d$)

$$\eta = \frac{1}{3} nm(\lambda + d)\bar{u} = \frac{1}{3} nm\lambda\bar{u} + \frac{1}{3} nmd\bar{u}$$

Le terme correctif est proportionnel à la pression via n , et la viscosité croît alors avec la pression.

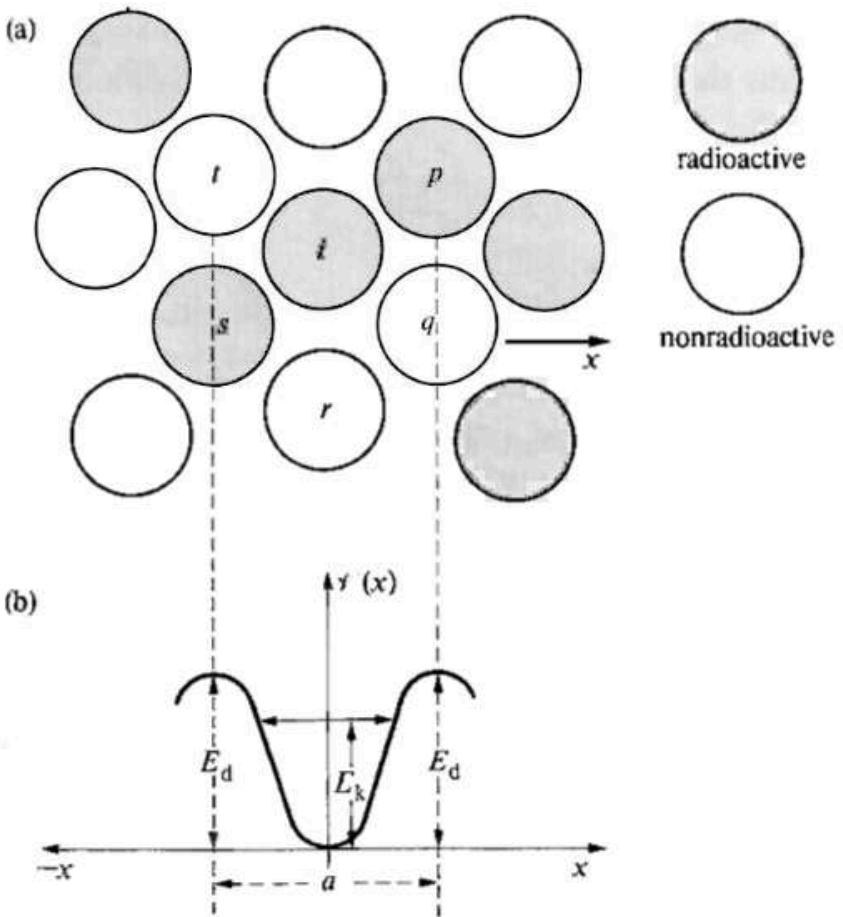
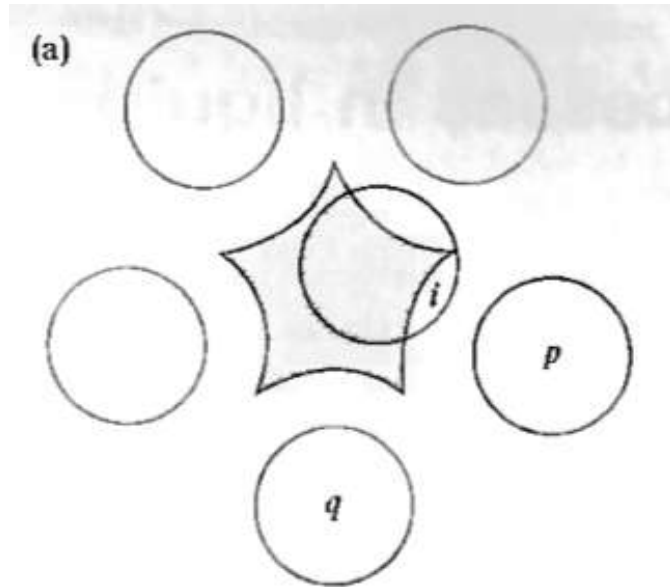
Coefficient de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$

$$\nu = \frac{1}{3} \lambda \bar{u} = D$$

Dans les gaz, le coefficient de viscosité cinématique correspond au coefficient de diffusion moléculaire. Il correspond au coefficient de diffusion de la quantité de mouvement.

Processus de transport dans les liquides

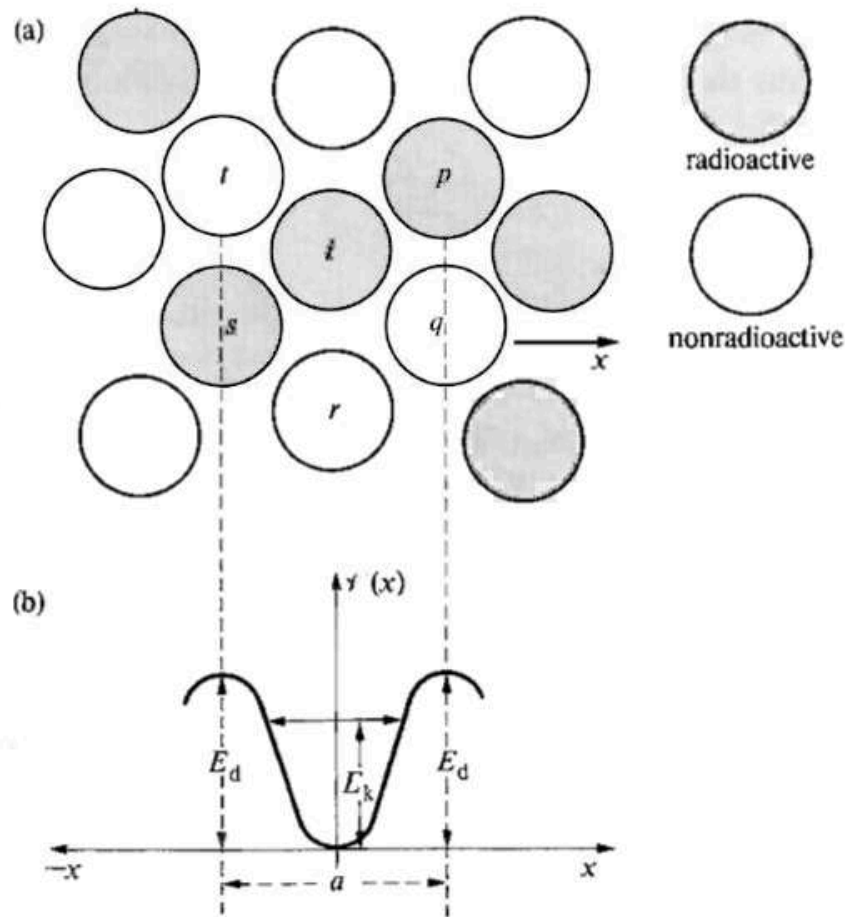
Modèle de cage



L'atome de référence reste en « cage » à temps court mais en sort à temps long. La fréquence d'échappement est le produit de la fréquence de collision $\sim u/a$ sur la cage de taille a et de la probabilité d'échappement de la cage $\sim \exp(-E_d/k_B T)$ qui conduit à la « vitesse de diffusion » $u \exp(-E_d/k_B T)$

Fig. 13.2. (a) The (time-averaged) environment of atom i . It is thus confined within a cell whose wall atoms are p , q , r , s , and t . (b) The potential energy $V(x)$ of atom i as it is displaced along the x -direction from the centre of the cell.

Diffusion moléculaire dans les liquides

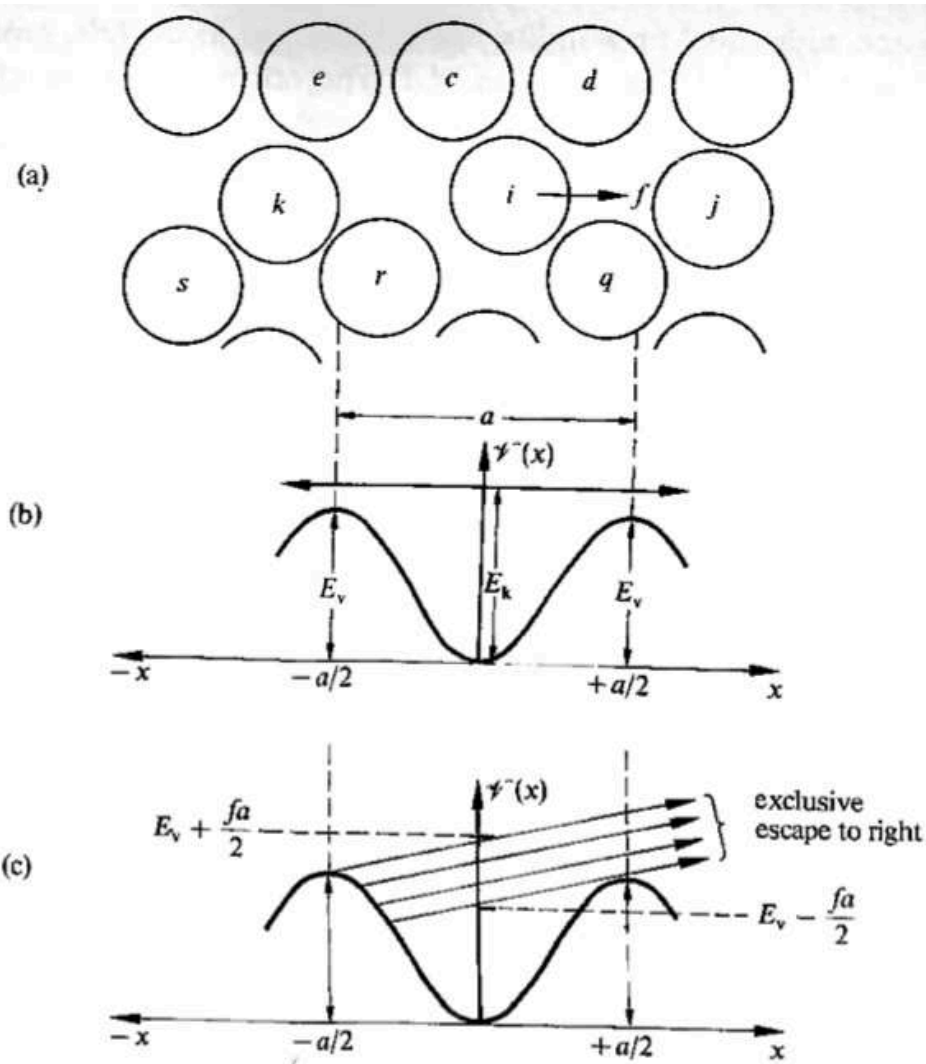


$$D = \frac{1}{3} a \bar{u} \exp\left(-\frac{E_v + pd^3}{k_B T}\right)$$

Le coefficient de diffusion d'un liquide augmente exponentiellement avec la température et avec la pression

Fig. 13.2. (a) The (time-averaged) environment of atom *i*. It is thus confined within a cell whose wall atoms are *p*, *q*, *r*, *s*, and *t*. (b) The potential energy $V(x)$ of atom *i* as it is displaced along the *x*-direction from the centre of the cell.

Viscosité dans les liquides



$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{E_v + pd^3}{k_B T}\right)$$

avec $\eta_0 \sim \rho a \bar{u}$

Fig. 13.5. Shows the factors responsible for viscous flow in a liquid. (a) A (shear) force F is applied to the top plate of area A (containing atoms c, d, e , etc.). (b) With no external force the activation energy is the same in the $+x$ - and $-x$ -directions. (c) The effect of a force f acting on atom i is to increase its kinetic energy by $\frac{1}{2}fa$ when it is at $x = \frac{1}{2}a$ and to decrease its kinetic energy by $\frac{1}{2}fa$ when it is at $x = -\frac{1}{2}a$.

La viscosité dynamique d'un liquide diminue exponentiellement avec une augmentation de température et croît exponentiellement avec la pression

Coefficient de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$

$$\nu = a\bar{u} \exp\left(\frac{E_v + pd^3}{k_B T}\right) \neq D = \frac{1}{3} a\bar{u} \exp\left(-\frac{E_v + pd^3}{k_B T}\right)$$

Dans les liquides, le coefficient de viscosité est très différent du coefficient de diffusion moléculaire avec un comportement inverse en fonction de la température et la pression. Alors que dans les gaz, ces deux coefficients sont égaux.

exemple de l'argon liquide

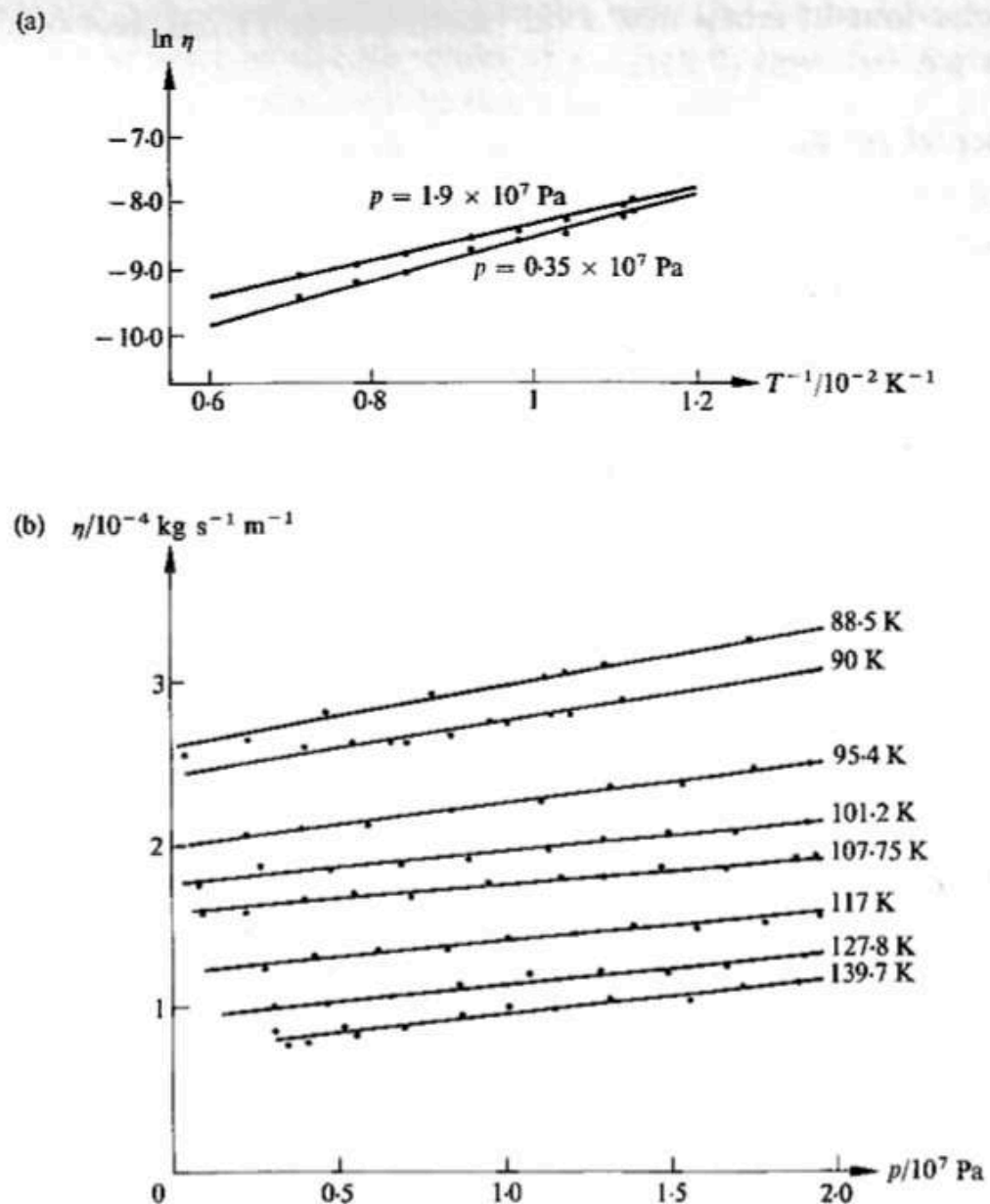


Fig. 13.6. The viscosity of liquid argon as a function of pressure and temperature. In (a) $\ln \eta$ is plotted against T^{-1} at two constant pressures. In (b) η is plotted against p at various constant temperatures. (Data from de Bock, A., Grevendonk, W., and Herreman, W. (1967). *Physica*, **37**, 327.)

2. Un milieu “continu”

Pour une masse ponctuelle, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{f} \quad \text{Newton (1687)}$$

Pour un fluide ?

On pourrait s'intéresser à chaque molécule du fluide :

Mais nombre de molécules ?

Pour de l'eau $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $M = 18 \text{ g/mole}$, $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ molécules/moles}$

$$n = \frac{\rho}{M} N_A \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ molécules/cm}^3$$

Impossible de s'intéresser au mouvement de chaque molécule fluide
 \Rightarrow on s'intéresse à un petit volume fluide, appelé “**particule**” fluide.
C'est l'approche “**milieu continu**”

Approche “milieu continu” : particule fluide d’échelle mésoscopique

Echelle microscopique \ll Echelle mésoscopique \ll Echelle macroscopique

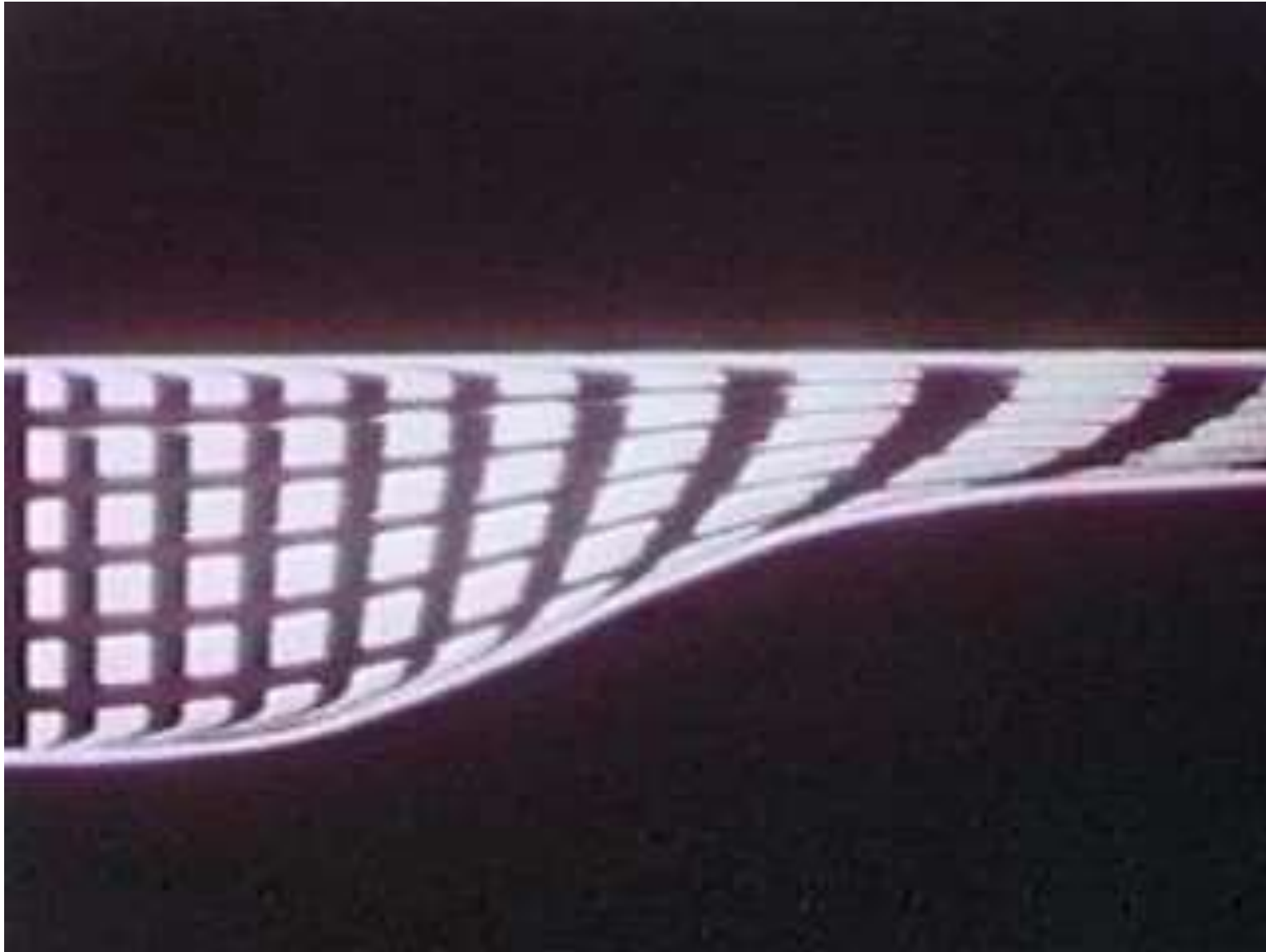
taille moléculaire d
libre parcours moyen λ

taille δ de la
“particule” fluide
taille de maillage

taille L de l’écoulement

OK sauf cas particuliers : - régime de Knudsen des gaz ($\lambda \gg L$)
- domaine de la micro ou nanofluidique

Advection et déformation d'une « particule fluide »



3. Vitesse et débit d'un fluide

Champ de vitesse

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \end{cases}$$

cylindriques

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, \theta, \varphi, t) \\ u_\theta(r, \theta, \varphi, t) \\ u_\varphi(r, \theta, \varphi, t) \end{cases}$$

sphériques

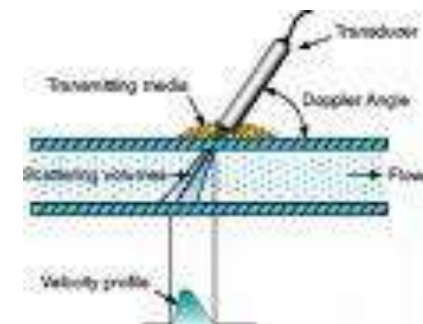
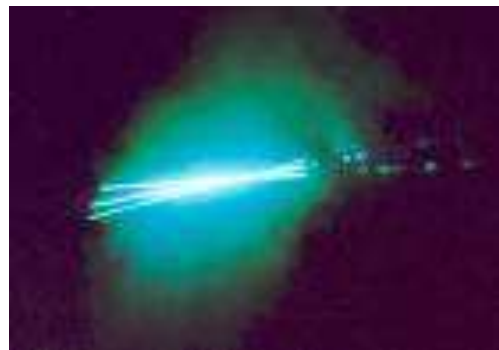
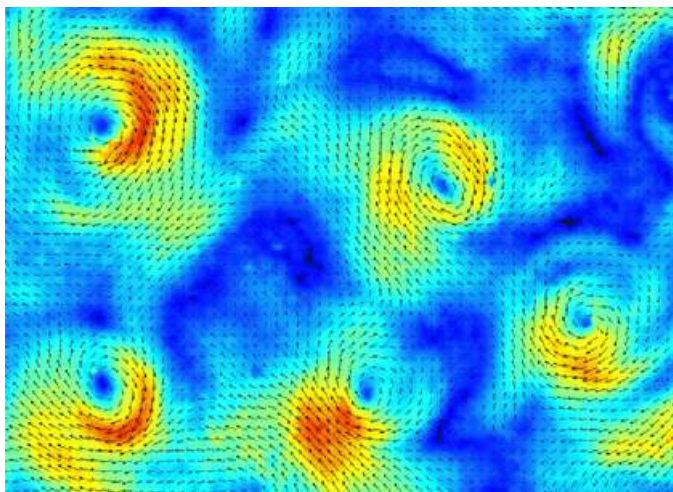
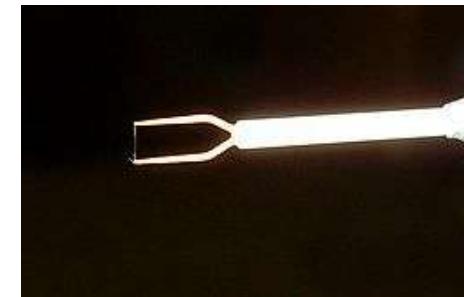
Écoulement stationnaire $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0\right)$ ou instationnaire $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \neq 0\right)$

Écoulement 3C3D ou 2C2D ou 1C1D

$$\begin{cases} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ (u_z = 0) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_x(y, t) \\ (u_y = 0) \\ (u_z = 0) \end{cases}$$

Mesure du champ de vitesse :

- anémomètre à hélice ou coupelles
- tube de Pitot
- anémomètre à fil chaud
- anémomètre ou vélocimètre Doppler Ultrasonore
- anémomètre ou vélocimètre Doppler Laser
- vélocimétrie par images de particules (PIV)



Débit d'écoulement

débit volumique

$$Q = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

débit massique

$$Q_m = \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

Vitesse débitante (vitesse moyenne) $U = \bar{u} = \frac{Q}{S}$

3. Lignes d'écoulement et visualisations

Les différentes lignes d'écoulement

Trajectoires particulières : ce sont les courbes caractérisant le déplacement des particules fluides au cours du temps (description lagrangienne)

Ligne d'émission : c'est la ligne occupée à un instant t par les différentes particules issues d'un même point du fluide aux instants antérieurs ($< t$)

Ligne de courant : ce sont les courbes partout tangentes au vecteur vitesse \mathbf{u} à un instant donné. Ce sont les lignes de champ du vecteur vitesse à cet instant (description eulérienne) : $d\mathbf{l} // \mathbf{u} \Rightarrow dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z$

Pour un écoulement *stationnaire* :

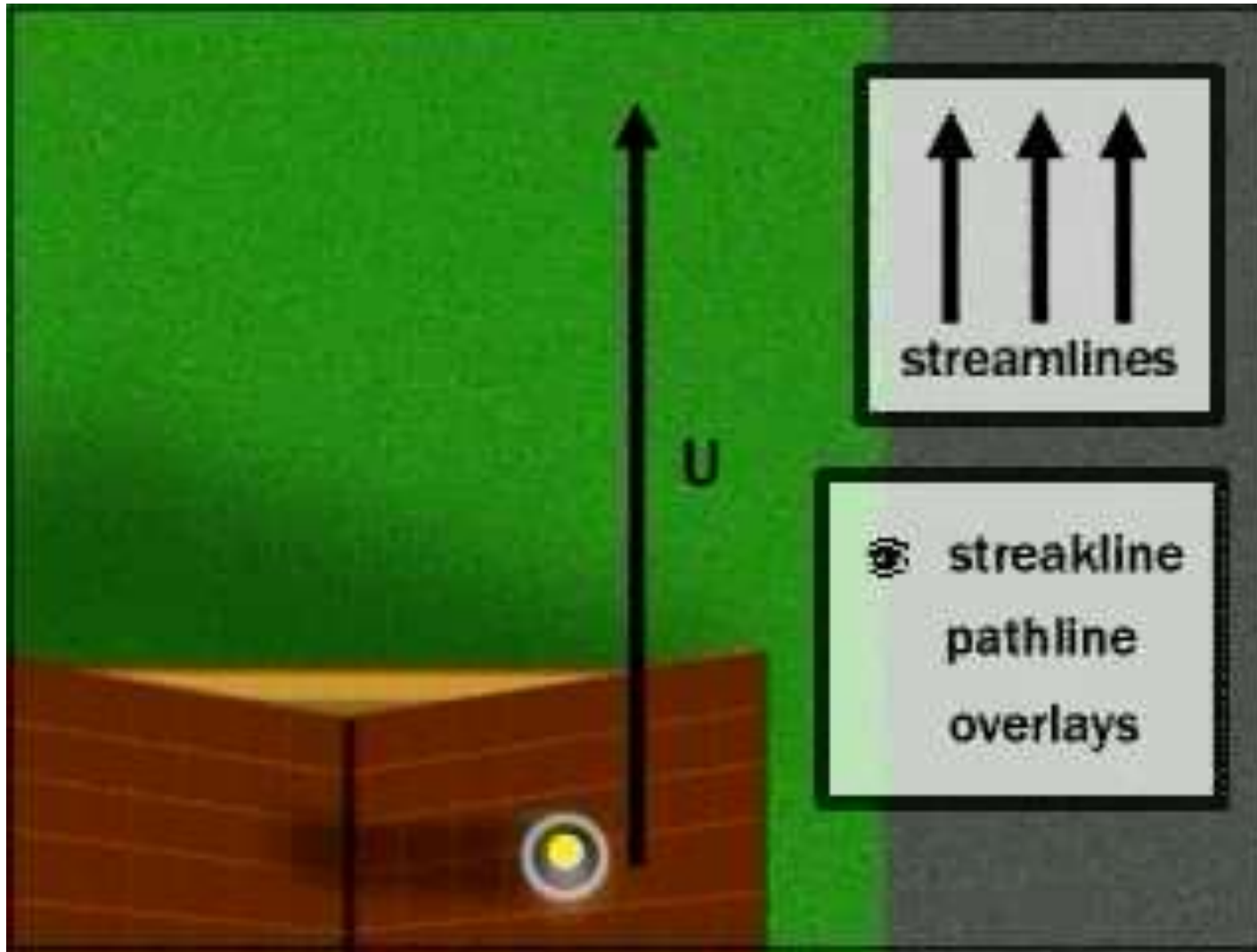
trajectoire particulière = ligne d'émission = ligne de courant

Pour un écoulement *instationnaire* :

trajectoire particulière \neq ligne d'émission \neq ligne de courant

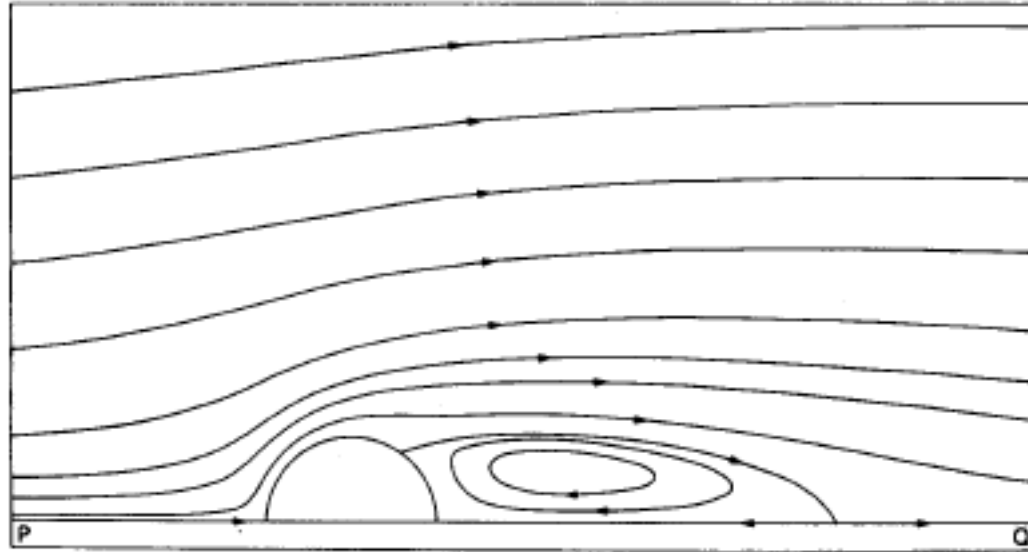
\Rightarrow Exemple de la fumée issue d'une cheminée avec un changement de vent

Lignes d'écoulements en écoulement instationnaire :
exemple d'un changement d'orientation de vent et visualisation par panache de cheminée



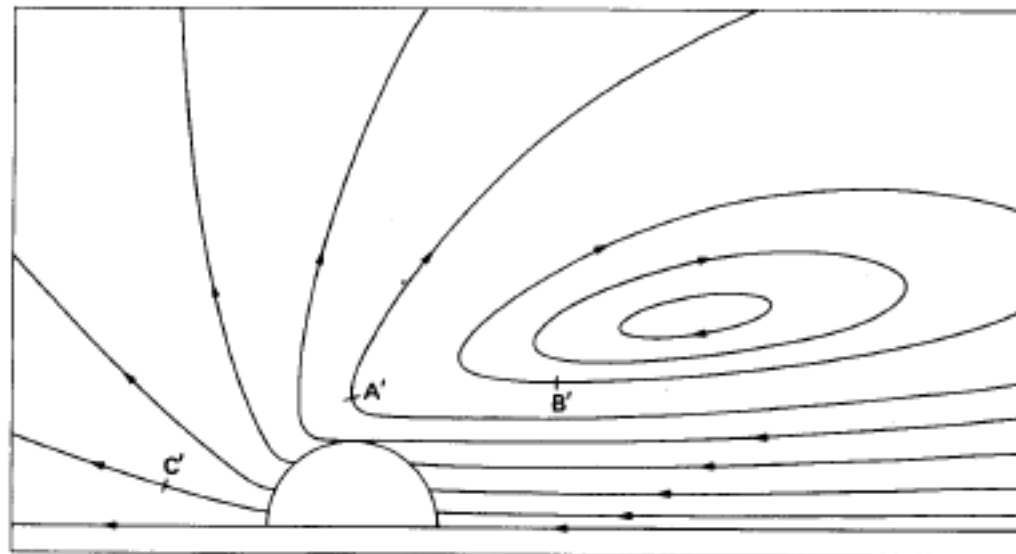
Lignes de courant autour d'un cylindre dans deux référentiels

cylindre
fixe



$Re = 40$

cylindre
mobile



Techniques de visualisation

- injection de colorant
- émission de fumée
- émission de bulles

Si l'injection ou l'émission est continue, on visualise les lignes d'émission

Si l'injection ou l'émission est ponctuelle (en temps), on visualise les trajectoires particulières

- ensemencement de particules

par particules sphériques

Photos avec temps de pose variables:

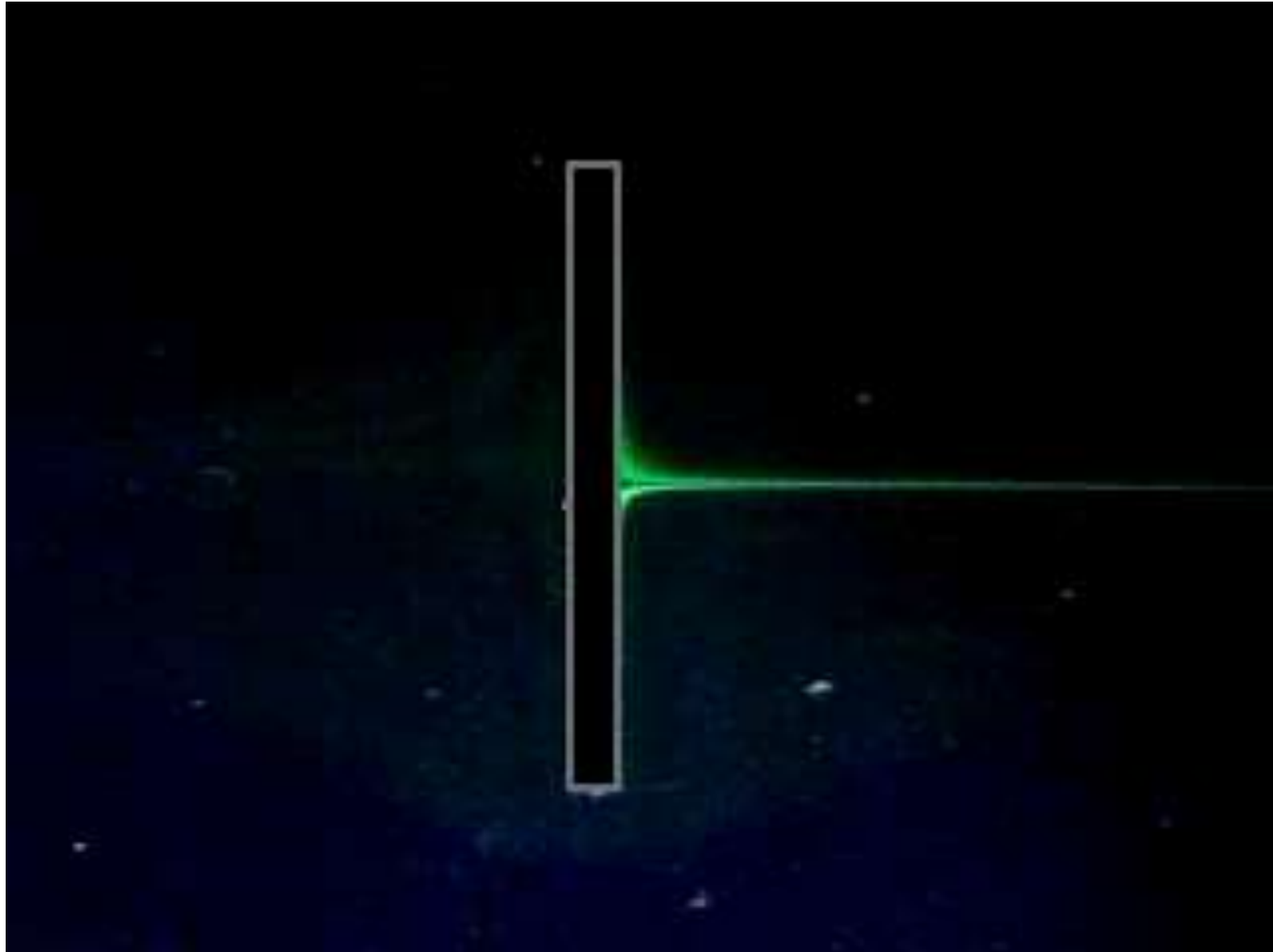
Temps de pose court : ligne de courant

Temps de pose long : trajectoire particulières et lignes d'émission

par particules anisotropes (paillettes réfléchissantes: Iriodin, Kalliroscope)

Structures de l'écoulement

Écoulement autour d'une plaque
Visualisation par injection de colorant dans une cellule de Hele-Shaw



Écoulement autour d'une aile
Visualisation par injection de fumée



Écoulement de démarrage au voisinage d'une plaque
Visualisation par marquage



Écoulement de convection naturelle
Visualisation par méthode de Schlieren



Impact d'un jet sur une plaque Visualisation par fluorescence



Tourbillons de mélange
Visualisation par particules nacrantes



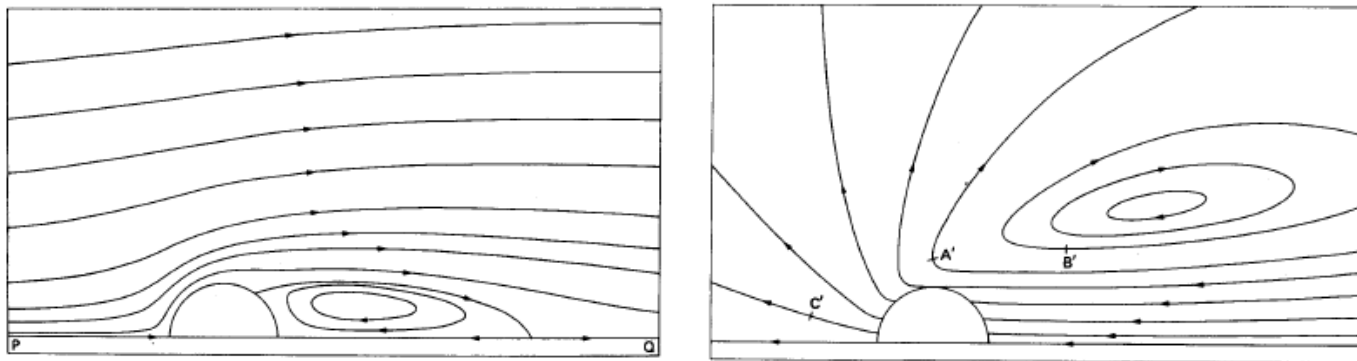
4. Fonction de courant

Pour les écoulements incompressibles 2C2D

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \operatorname{rot}(\psi \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

- $\psi = \text{cte}$ le long d'une ligne de courant (ligne de champ de \mathbf{u})
- débit constant entre deux lignes de courant ($q = \psi_2 - \psi_1$)
 - si les lignes de courant se rapprochent, la vitesse augmente localement
 - si les lignes de courant s'éloignent, la vitesse diminue localement
- deux lignes de courant ne se croisent qu'en des points de stagnation ou points d'arrêt ($\mathbf{u} = 0$)



Lignes d'écoulement autour d'un cylindre fixe ou mobile
($Re = 40$)

➤ $\psi = \text{cte}$ le long d'une ligne de courant :

$$\text{En effet } d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -u_y dx + u_x dy = 0 \quad \text{car } \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

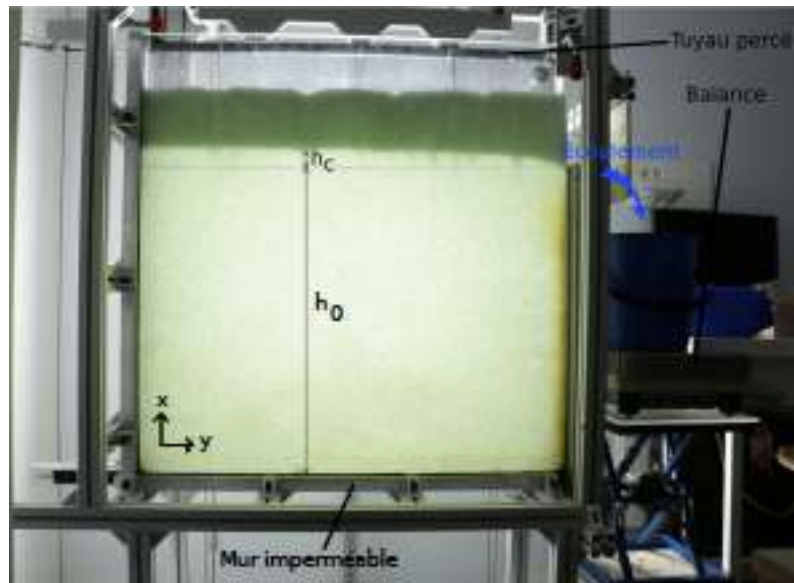
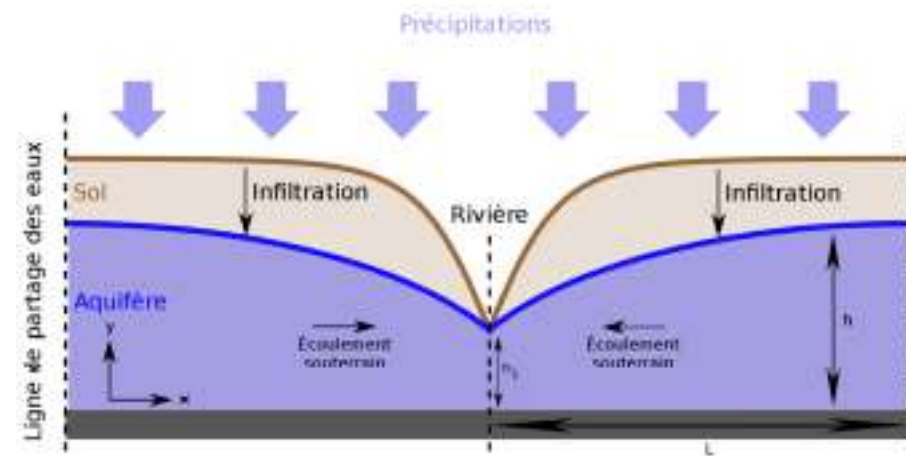
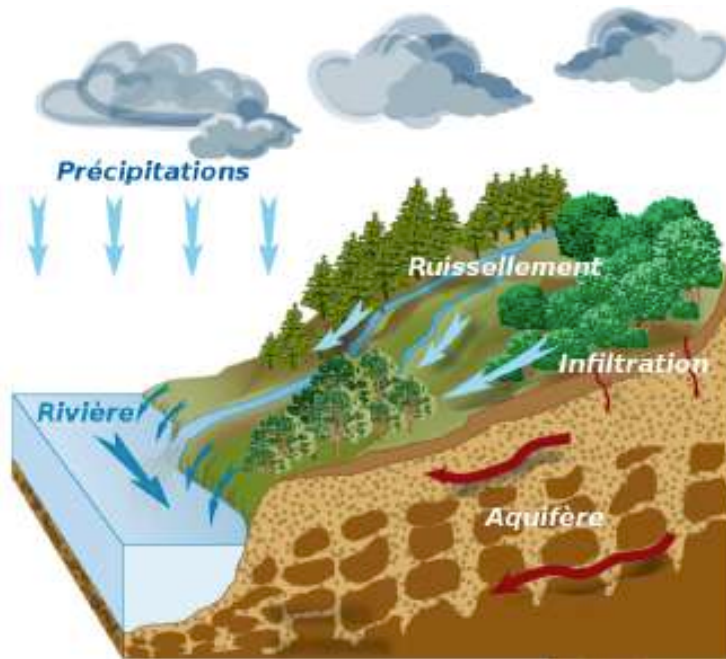
le long d'une ligne de courant

➤ débit constant entre deux lignes de courant ($q = \psi_2 - \psi_1$) :

$$q = \frac{Q}{\ell} = \frac{\iint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{\ell} = \iint \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{\ell}$$

$$q = \int_1^2 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \int_1^2 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \\ 0 \end{pmatrix} = \int_1^2 u_x dy - u_y dx = \int_1^2 \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Réponse d'un aquifère expérimental à un épisode pluvieux (Thèse Jules Valentin, IPG Paris, 2020)



5. Accélération d'un fluide : Euler vs Lagrange

Variation temporelle d'une quantité scalaire ?

exemple de la température $T(x,y,z,t)$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

formulation développée

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T$$

formulation compacte

terme terme
instationnaire convectif

Variation temporelle d'une quantité vectorielle ?

exemple de la vitesse $\mathbf{u}(x,y,z,t)$ pour l'obtention de l'accélération $\frac{d\mathbf{u}}{dt}(x,y,z,t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right.$$

formulation développée

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

formulation compacte

	terme	terme
accélération totale	instationnaire d'accélération	d'accélération convective
« lagrangienne »	« eulérienne »	

Chapitre II – Théorèmes de transport

Ces théorèmes, basés sur les notions de **volume de contrôle** et de **surface de contrôle**, sont très puissants en permettant d'écrire des **équations bilans**, sur des quantités scalaires ou vectorielles, notamment de **masse**, **quantité de mouvement** et **énergie**.

En régime stationnaire, seul importe ce qui se passe aux frontières du volume de contrôle et pas à l'intérieur. Par exemple, pour la situation d'un ressaut hydraulique en régime stationnaire, les équations bilans pourront être écrites sans connaître ce qui se passe localement au niveau du ressaut mais seulement en amont et aval.



D'autre part, ces équations bilans écrites pour un volume matériel quelconque permettent également d'aboutir aux équations locales de conservation de la masse, et concernant la quantité de mouvement et l'énergie.

1. Volume de contrôle

Un **volume de contrôle** (VC) est un volume imaginaire limité par une **surface de contrôle** (SC). Ce volume de contrôle peut être

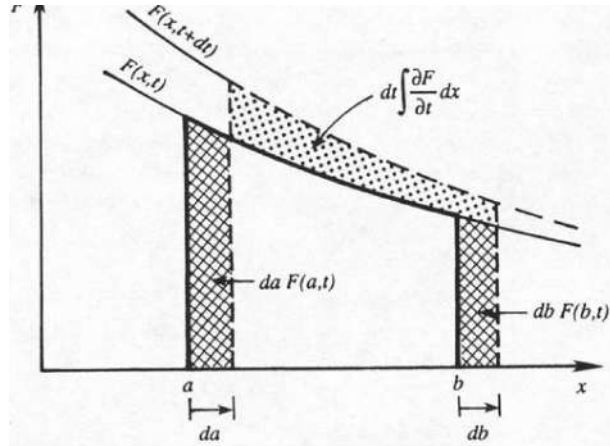
- un **volume fixe** dans le référentiel du laboratoire
(la vitesse de la surface de contrôle est alors nulle en tout point)
- un volume toujours constitué des mêmes particules fluides :
on parle alors de **volume matériel**
(la vitesse de la surface est égale en tout point à la vitesse locale du fluide)
- un volume ayant un déplacement arbitraire
On parle alors de **volume mobile**



1. Théorème de Leibnitz

Ce théorème précise la dérivée temporelle de l'intégrale d'une fonction de l'espace et du temps dont les bornes dépendent du temps. Dans le cas d'une fonction scalaire $f(x,t)$ dépendant d'une variable d'espace x et du temps t , il s'écrit :

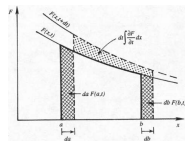
$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[b(t),t] \frac{db(t)}{dt} - f[a(t),t] \frac{da(t)}{dt}$$



3. Transport d'une fonction scalaire

Le théorème précédent se généralise à 3D pour une fonction scalaire $f(x,y,z,t)$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r},t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \oiint_{SC(t)} f(\vec{r},t) \vec{V}(\vec{r},t) \cdot \vec{dS}$$



où $V(\vec{r},t) = V(x,y,z,t)$ est la vitesse locale de déplacement de la surface de contrôle au point considéré.

Via le théorème de Green-Ostrogradsky, le 2^{ème} terme se transforme en une intégrale de volume et on obtient le **théorème de transport de Reynolds** :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r},t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right] d\tau$$

4. Conservation de la masse

En considérant les théorèmes précédents avec pour fonction scalaire la masse volumique locale $\rho(x,y,z,t)$ du (des) fluide(s) à l'intérieur d'un volume de contrôle, on peut écrire la conservation de la masse M :

$$M_{VC(t)} = \iiint_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau$$

Si VC est un volume de contrôle matériel, i.e. emporté par l'écoulement, alors la masse correspondante ne varie pas

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = 0$$

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{SC} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Via le théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient la version correspondant au **théorème de transport de Reynolds**) :

$$\iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0.$$

Cette relation étant valable quelque soit le volume de contrôle matériel, on peut alors écrire l'équation locale de conservation de la masse (parfois appelée équation de continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} (\vec{v}) = 0 \quad \text{car} \quad \text{div} (\rho \vec{v}) = \rho \text{div} (\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\rho)$$

Ce qui entraîne pour un **fluide incompressible** ($D\rho/Dt = 0$) l'équation locale simple :

$$\text{div} (\vec{v}) = 0$$

A noter que cela reste vrai pour un fluide inhomogène en densité (e.g. « fluide stratifié ») où le terme $\partial\rho/\partial t$ n'est pas forcément nul même si $D\rho/Dt = 0$

5. Transport d'une quantité vectorielle

Si la fonction considérée n'est pas scalaire mais vectorielle, on peut appliquer le théorème de transport pour chacune de ses composantes, ou écrire de manière compacte :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) [\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{d}\vec{S}]$$

6. Bilan de quantité de mouvement

En considérant comme fonction vectorielle la quantité de mouvement par unité de volume $\rho\vec{v}$, on peut écrire pour un volume de contrôle matériel

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho\vec{v} d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho\vec{v} [\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}]$$

D'après le principe fondamental de la dynamique, cette quantité correspond à la somme des forces extérieures \mathbf{F} au volume correspondant.

En considérant la composante F_i de la force dans la direction i , on peut écrire

$$\iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho v_i [\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}] = F_i$$

Mais cette équation
$$\iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} d\tau + \iint_{SC(t)} \rho v_i [\vec{v} \cdot d\vec{S}] = F_i$$

peut aussi s'écrire via Green-Ostogradsky

$$\iiint_{VC(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \text{div} (v_i \rho \vec{v}) \right) d\tau = F_i$$

et en utilisant le fait que $\text{div} (v_i \rho \vec{v}) = v_i \text{div} (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (v_i)$ s'écrire aussi

$$\iiint_{VC(t)} \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (v_i) \right) d\tau = F_i$$

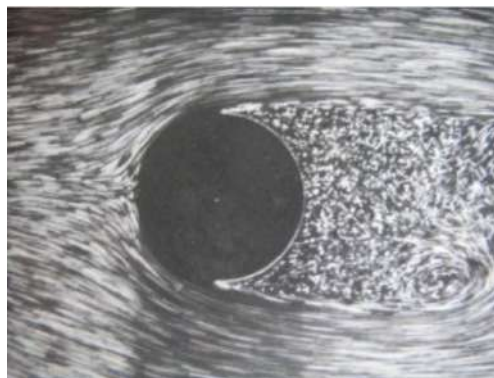
En considérant chacune des trois composantes, cela donne finalement l'équation vectorielle

$$\iiint_{VC(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau = \vec{F}$$

A noter que cette équation du mouvement du fluide est vraie quelque soit le fluide (incompressible ou compressible) s'il satisfait à la conservation de la masse.

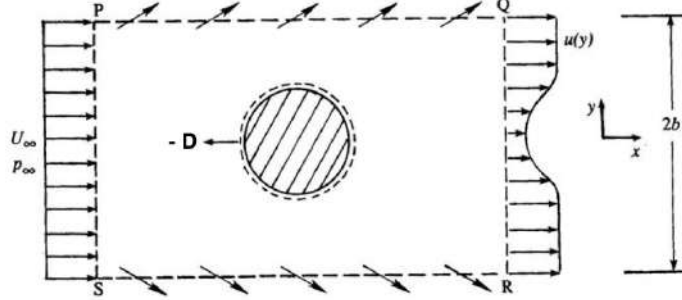
Pour préciser plus cette équation du mouvement du fluide, il faudra exprimer les différentes forces qui s'exercent en volume (e.g. la gravité) et en surface (contraintes normales et tangentielles)...

7. Application au sillage d'un cylindre



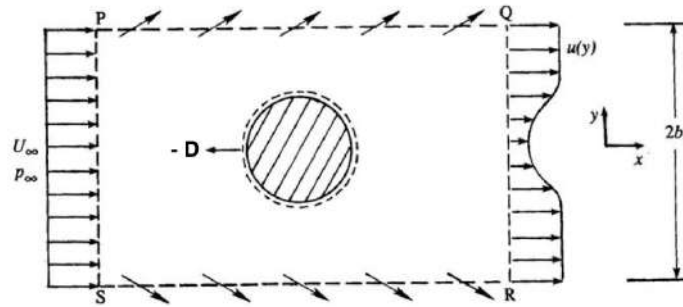
Force de traînée sur le cylindre ?

Considérons un écoulement stationnaire autour d'un cylindre. On va montrer ici que la force exercée par le fluide sur le cylindre, dite force de traînée F_D , se retrouve dans (ou par) le profil de vitesse en aval $U(y)$ perturbé par rapport au profil amont U_∞ non perturbé, la pression étant considérée identique en amont et en aval



Considérons le volume de contrôle matériel fluide contenu dans le rectangle PQRS (PS = QR = 2b) entourant le cylindre . L'équation bilan de quantité de mouvement général étant

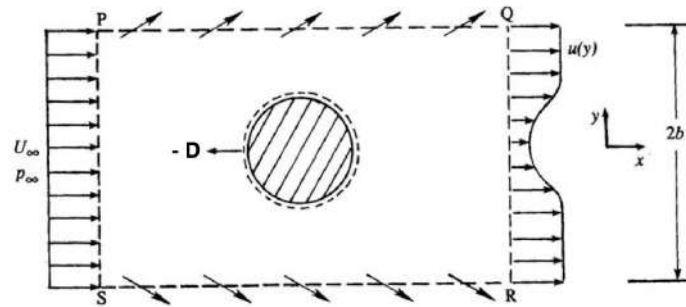
$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} d\tau + \oiint_{SC(t)} \rho \vec{v} [\vec{v} \cdot d\vec{S}] = \vec{F}$$



cette équation bilan s'écrit ici suivant la direction x

$$\underbrace{\iint_P^Q \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + \iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + \iint_R^S \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S})}_{\rho L \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy} + \underbrace{\iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S})}_{-2\rho b L U_\infty^2} + \iint_{cylindre} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = -F_D$$

pour un écoulement 2C2D supposé invariant dans la direction transverse z sur une longueur L



$$\iint_P^Q \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{dS}) = U_\infty \iint_P^Q \rho (\vec{v} \cdot \vec{dS}) = U_\infty \dot{m}_{PQ}$$

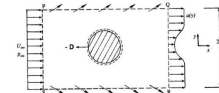
où \dot{m}_{PQ} et \dot{m}_{RS} sont les débits massiques à travers PQ et RS

$$\iint_R^S \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{dS}) = U_\infty \iint_R^S \rho (\vec{v} \cdot \vec{dS}) = U_\infty \dot{m}_{RS}$$

Mais par conservation de la masse $\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{QR} + \dot{m}_{RS} + \dot{m}_{SQ} = 0$

d'où $\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{RS} = -\dot{m}_{PS} - \dot{m}_{QR} = L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy$

L'équation bilan de quantité de mouvement suivant la direction x s'écrit alors



$$-2bL\rho U_\infty^2 + L\rho \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy + U_\infty \left(L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy \right) = -F_D$$

qui se simplifie en

$$F_D = \rho L \int_{-b}^b U(y) [U_\infty - U(y)] dy$$

La mesure expérimentale du profil de vitesse en aval permet ainsi de déterminer la force de traînée exercée par le fluide sur l'obstacle sans l'instrumenter.

8. Bilan d'énergie

En notant U l'énergie interne d'un volume de contrôle, d'après la thermodynamique (second principe)

$$\frac{dU}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

où \dot{W} est le travail des forces extérieures (hors gravité) par unité de temps et \dot{Q} la quantité de chaleur par unité de temps.

L'énergie interne est

$$U = \iiint_{VC(t)} e \, d\tau,$$

où $e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ est l'énergie interne par unité de volume (énergie cinétique + potentielle de pesanteur)

L'équation bilan d'énergie s'écrit alors

$$\dot{W} + \dot{Q} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} e(\vec{r}, t) \, d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial e}{\partial t} \, d\tau + \oint_{SC(t)} e(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{d}\vec{S}$$

Chapitre III – Contraintes dans un fluide

Les contraintes dans un milieu continu, fluide ou solides, se décrivent par leur tenseur. L'intérêt et l'utilité de la notion de tenseur pour la description physique de phénomènes physiques se comprend facilement : de la même façon que la description des variations spatiales d'une fonction scalaire conduit à la nécessité de l'introduction du vecteur gradient, la description des variations spatiales d'une fonction vectorielle conduit à la nécessité de l'introduction du *tenseur* gradient, constitué des composantes des vecteurs gradient de chacune de ses composantes. C'est un tenseur dit *de rang 2*.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse $[G]$ par

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$$

On a alors $\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl}$.

$$\{\vec{dv}\}_i = \{[G] \cdot \vec{dl}\}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dl} = dv_i.$$

1. Le tenseur des contraintes

On appelle *contrainte* la force de contact par unité de surface. Le tenseur des contraintes s'écrit

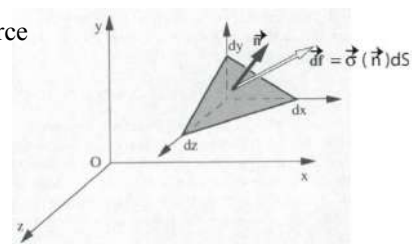
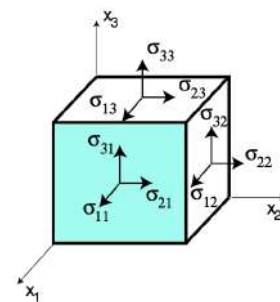
$$[\sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Par convention σ_{ij} est la contrainte dans la direction i s'exerçant sur une surface de normale **sortante** dans la direction j .

On appelle par ailleurs *vecteur contrainte* $\vec{\sigma}(\vec{n})$ la force de contact par unité de surface qui s'exerce sur une surface quelconque de normale sortante \vec{n} .

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j$$

(avec la convention de sommation d'Einstein)



2. Symétrie et décomposition du tenseur des contraintes

Symétrie du tenseur des contraintes :

- Par le principe de l'action-réaction : $\vec{\sigma}(\vec{n}) = -\vec{\sigma}(-\vec{n})$

(la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle)

Pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit, il suffit donc de connaître les contraintes sur trois faces contigües, car sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

- Le tenseur des contraintes est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

(les moments résultants des contraintes sur les faces d'un cube infinitésimal par rapport à chacune des directions doivent être nulles)

Décomposition du tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = -p[I] + [\sigma']$$

où p est la **pression** et $[I]$ le tenseur identité $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $[\sigma']$ le **tenseur des contraintes visqueuses**

Sans écoulement (cas hydrostatique) $[\sigma'] = 0$ et les contraintes se réduisent alors à

$$-p[I] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Attention, la convention sur les normales aux surfaces est inversée pour la pression (la normale est rentrante pour que la pression soit positive)

3. Equation du mouvement d'un fluide quelconque

Le PFD appliqué à un volume matériel quelconque de fluide quelconque s'écrit

$$\iiint_{VC(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau = \sum \vec{F}_{ext}$$

Les forces extérieures se décomposent en forces de volume et forces de surface (contraintes) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{vol} + \vec{F}_{surf}$$

Les forces volumiques se réduisent à la gravité sauf exceptions (e.g., fluides électromagnétiques) :

$$\vec{F}_{vol} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau$$

Les forces surfaciques s'écrivent

$$\vec{F}_{surf} = \iint_{SC} \vec{\sigma}(\vec{n}) dS$$

En s'intéressant à la composante de force suivant la direction i et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, on peut montrer que

$$\left\{ \vec{F}_{surf} \right\}_i = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau \quad (\text{avec la convention de sommation d'Einstein})$$

$$\left\{ \vec{F}_{surf} \right\}_i = \iiint_{VC} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \right) d\tau$$

La somme des forces extérieures au VC suivant la direction i s'écrit alors

$$\sum \left\{ \vec{F}_{ext} \right\}_i = \iiint_{VC} \left(\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) d\tau$$

et la somme des forces extérieures au VC peut s'écrire de manière compacte comme

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_{VC} (\rho \vec{g} + \text{div}[\sigma]) d\tau$$

où les forces de surface apparaissent comme la divergence du tenseur des contraintes (attention, cette divergence généralisée est un vecteur)

Le PFD appliqué à un volume matériel quelconque de fluide quelconque s'écrit donc finalement

$$\iiint_{VC(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau = \iiint_{VC} (\rho \vec{g} + \text{div}[\sigma]) d\tau$$

L'équation locale du mouvement d'un fluide quelconque s'écrit alors

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} + \text{div}[\sigma]$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \text{div}[\sigma']$$

Pour aller plus loin, il faudra exprimer la relation dite *constitutive* du fluide entre le tenseur des contraintes et le tenseur des gradients de vitesses

Chapitre IV – Hydrostatique

L'**hydrostatique** traite des cas où le fluide est statique, c'est-à-dire où la vitesse du fluide est nulle ($\mathbf{u} = 0$).

1. Pression dans le champ de pesanteur

L'équation générale du mouvement d'un fluide quelconque

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \text{div}[\sigma']$$

s'écrit alors très simplement

$$0 = \rho \vec{g} - \nabla p$$

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Profil de pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : $\rho = \text{cte}$ (cas de l'eau sauf exceptions)

on peut alors résoudre (intégrer) l'équation de l'hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \rho g z \quad \text{où } p = p_0 \text{ en } z = 0$$

Si h est la différence d'altitude (ou de profondeur) entre 2 points A et B, la différence de pression entre A et B est :

$$p_B - p_A = \rho g h$$

Applications numériques

(1) Cas de l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) : pression à 10 m sous l'eau ?

$$\rho g h = 10^5 \text{ Pa et } p_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

la pression à 10 m sous l'eau est double de la pression atmosphérique

la pression augmente de 10^5 Pa tous les 10 m d'eau

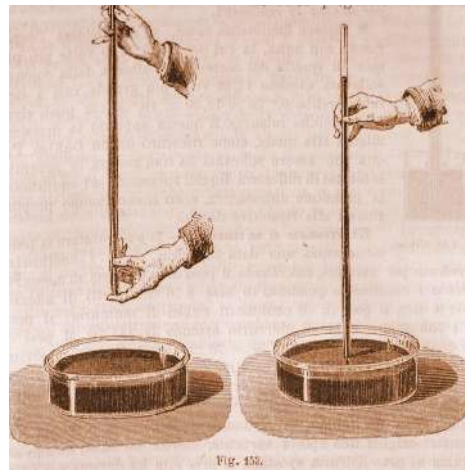
(2) Cas du mercure ($\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) :

$$\rho g \Delta h = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow \Delta h = 0,76 \text{ m}$$

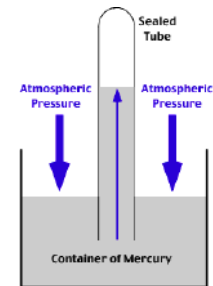
76 cm de mercure correspond à la pression atmosphérique

Application au baromètre à mercure de Torricelli

Le baromètre de Torricelli



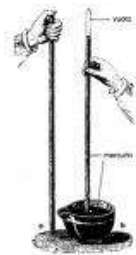
Expérience de Torricelli (1644)



Hauteur de la colonne de mercure : 76 cm



Evangelista Torricelli
(1608-1647)



Blaise Pascal
(1623-1662)

Expérience avec du mercure :
76 cm

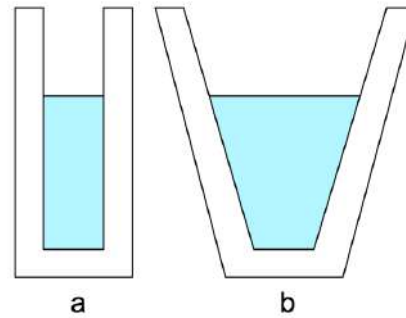
Expérience avec du vin (Rouen, 1646) :
tube de verre de 15 m rempli de vin
et renversé dans un baquet
=> 10,4 m mesuré

Le « paradoxe » de Stevin (1586) :

la pression d'un liquide au fond d'un récipient est indépendante de sa forme



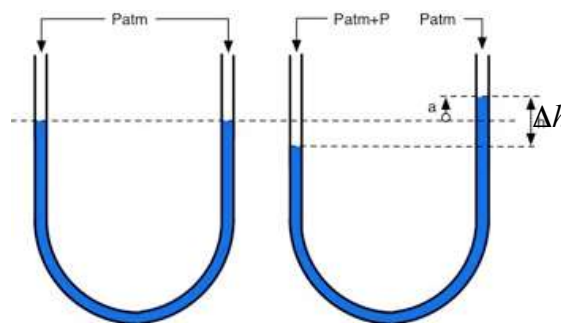
Simon Stevin
(1548-1620)
ingénieur flamand



Manomètre à tube en U

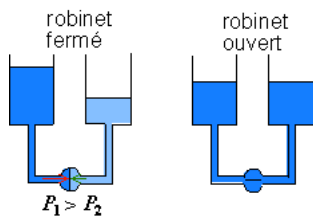
Si Δh est la dénivellation entre 2 points A et B, la différence de pression entre A et B est:

$$p_B - p_A = \rho g \Delta h$$



Mesure de (différence de) pression par mesure de (différence de) hauteur

Principe des vases communicants

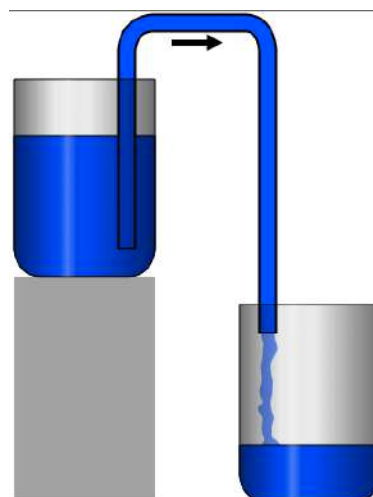


sert de « niveau » très simple dans le bâtiment
pour mettre deux points à l'horizontale

Attention aux tubes trop fins
($D < 3$ mm pour de l'eau)
=> Phénomène d'ascension
capillaire (cf chapitre 5)



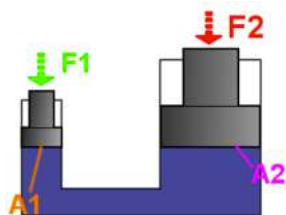
Le siphon



La coupe de Pythagore (ou coupe de Tantale)



Presse hydraulique



$$P_2 = P_1$$

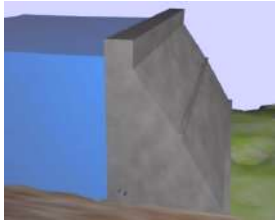
$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \gg F_1$$



inventée avec la seringue par Blaise Pascal

Dimensionnement des barrages et digues



barrage-poids

Force exercée par l'eau sur le barrage ?

Quelle quantité de terre ou de béton pour le barrage ?

Quelle forme adopter pour le barrage ?



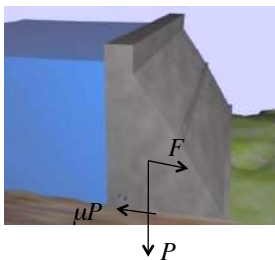
Barrage poids en terre ou en enrochement



barrage d'Aussois (Savoie)

Dimensionnement des barrages et digues

Cas du barrage poids



Force exercée par l'eau sur le barrage ?

$$F = \int_0^h (p - p_0) dz L$$

$$F = L \int_0^h \rho g z dz$$

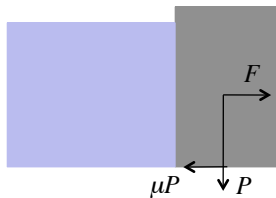
$$F = \rho g L h^2 / 2$$

Pour un barrage de 100 m de long retenant 10 m d'eau : $F \approx 5.10^7 N$

Poids nécessaire du barrage : $P = F / \mu = \rho g L h^2 / (2\mu) \approx 3.10^8 N$
avec $\mu \approx 0,2$ coefficient de friction solide

Volume de béton nécessaire : $V = (\rho / \rho_b) L h^2 / (2\mu) \approx 10^4 m^3$
avec $\rho_b \approx 3.10^3 kg/m^3$ masse volumique du béton

Forme du barrage ?

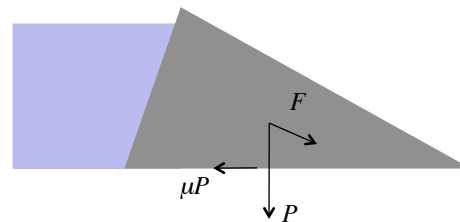
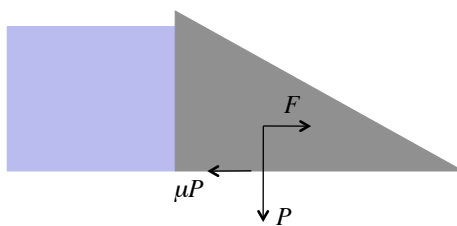


Rectangulaire ?

Largeur nécessaire : $l = V / (Lh) = (\rho / \rho_b) h / (2\mu) \approx h \approx 10m$

Mais risque de basculement

=> Triangulaire

Largeur nécessaire : $l = 2V / (Lh) \approx 2h \approx 20m$ 

Le barrage en terre du Lac de Serre-Ponçon (Hautes-Alpes) construit en 1957-59



Dimension du barrage : 123 m de haut et 125 m de large au pied (sur 600 m de long)

Retenue d'eau : 1 272 millions de m³

Champ de pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas moins simple : $\rho \neq \text{cte}$
(cas possibles pour l'eau avec gradients de salinité et température)

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Réchauffement climatique : montée des océans

La dilatation thermique de l'eau entraîne une variation de hauteur d'eau en fonction de la température.

Pour une masse d'eau donnée, considérée ici constante, le volume d'eau V variera par dilatation thermique et entrainera une variation de hauteur d'eau H proportionnelle pour une surface d'océan S considérée constante :

$$V = SH$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dH}{H}$$

$$dH = \frac{dV}{V} H = \alpha H dT \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \approx 4.10^{-4} K^{-1} \quad \text{est le coefficient de dilatation thermique de l'eau vers } 20^\circ\text{C}$$

Pour une profondeur moyenne d'océan $H \approx 4000$ m, cela conduit à une variation de hauteur d'eau de près de 2 m par degré.

Profil de pression $p(z)$ dans l'atmosphère (compressible)

équilibre hydrostatique : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

Mais attention ici $\rho(z)$ car $\rho(p,T) : \rho = \frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT}$

en considérant l'atmosphère comme un **gaz parfait** :
 $pV = RT$ (pour 1 mole)

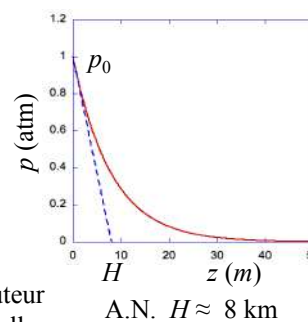
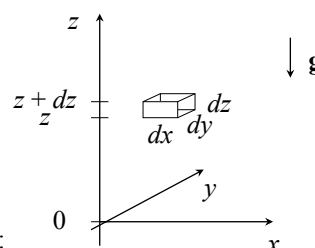
Si atmosphère "**isotherme**" ($T = \text{cte}$) alors $\rho(p)$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mp}{RT} g$$

$$\implies \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz \quad (\text{avec } p = p_0 \text{ en } z = 0)$$

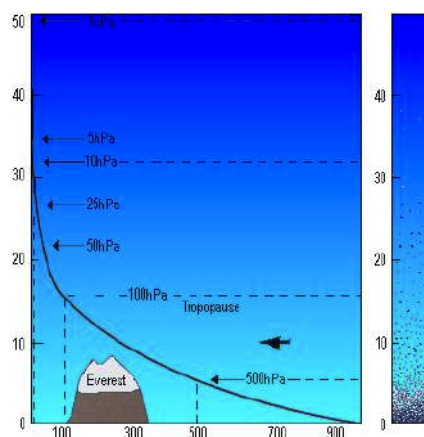
$$\implies p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec } H = \frac{RT}{Mg} \quad \ll \text{Hauteur d'échelle} \gg$$

$$p \approx p_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad z \ll H \quad \text{La pression décroît exponentiellement avec l'altitude}$$



Pression au sommet	$p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$	p_{exp}
Sommet du Mont Blanc (4809 m) ?	0,55	0,54
Sommet de l'Everest (8846 m) ?	0,33	0,32

Le modèle d'atmosphère "isotherme" ($T = \text{cte}$) donne donc des résultats très satisfaisants



Profil de température de l'atmosphère (non isotherme)

Le gradient de pression dans l'atmosphère (existant par l'équilibre hydrostatique) est nécessairement associé à un gradient de température. En effet, un gaz qui se détend voit sa température baisser et réciproquement/ Si on suppose qu'il n'y a pas d'échange de chaleur lors des mouvements d'air de l'atmosphère (transformation dite "adiabatique") alors :

$$pV^\gamma = cte \quad \text{avec } \gamma = 7/5 \text{ pour un gaz diatomique comme l'air}$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{or } pV = RT \quad \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}$$

$$(1-\gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{dp}{dz} \quad \text{avec } \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{Mp}{RT} g$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R} \quad \frac{dT}{dz} \approx -10^{-2} K/m \quad (\text{soit } -1 K/100 m \text{ ou } -10K/km)$$

NB : Ce calcul correspond à une atmosphère sèche (HR = 0%). Pour une atmosphère saturée en eau (HR = 100%), c'est -6K/km. Pour $0 < HR < 100\%$, $-10 K/km < dT/dz < -6 K/m$

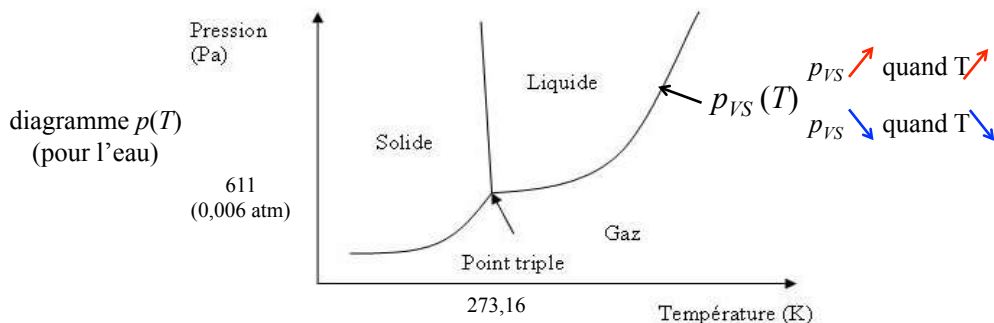
Taux d'humidité

Qu'est ce que le **taux d'humidité** ou **taux d'hygrométrie HR** ?

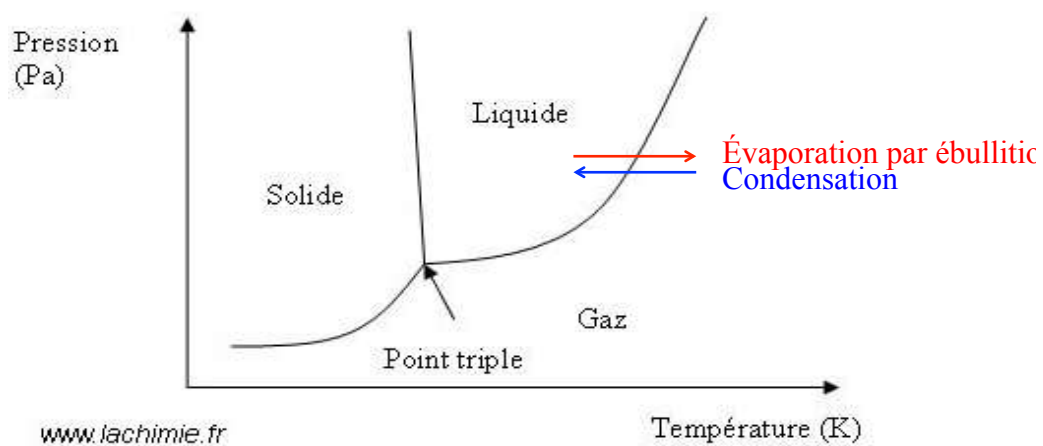
$$HR = \frac{p_{H_2O}}{p_{VS H_2O}}$$

pression partielle de vapeur d'eau
pression de vapeur saturante de l'eau

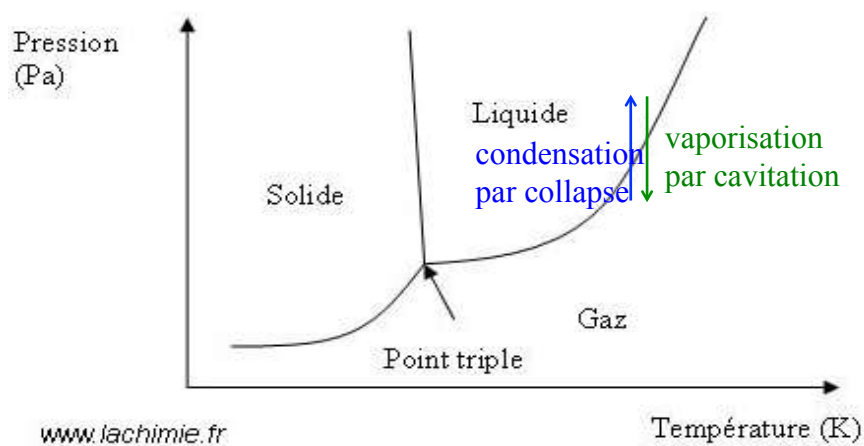
! La pression de vapeur saturante de l'eau est une fonction croissante de la température : $p_{VS}(T)$



passage liquide-gaz (vapeur)



passage liquide-gaz (vapeur)



Notion de pression de vapeur saturante :
l'expérience du « bouillant de Franklin »



vidéo sur <https://www.lespritsorcier.org/blogs-membres/le-bouillant-de-franklin/>

Atmosphère sèche et humide

Quel est l'air le plus lourd ? L'air sec ou l'air humide ?

$$M(\text{O}_2) = 32 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{air sec}) \approx 29 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{N}_2) = 28 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{vapeur d'eau}) \approx 18 \text{ g/mol}$$

$$pV = RT \quad \text{pour une mole de gaz considéré parfait}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

$$\rho_{\text{air humide}} < \rho_{\text{air sec}} \quad (\text{à même température})$$

2. Force (poussée) d'Archimède

La force d'Archimède F_A correspond à l'intégrale des forces de pression exercée sur un objet par le (ou les) fluide(s) qui le baigne(nt)



$$\vec{F}_A = - \iint_S p d\vec{S}$$

$$\{F_A\}_x = - \iint_S p \vec{e}_x \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \text{div}(p \vec{e}_x) d\tau = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

$$\vec{F}_A = - \iiint_V \vec{\nabla} p d\tau = - \iiint_V \rho \vec{g} d\tau = - \left(\iiint_V \rho d\tau \right) \vec{g}$$

Archimède
Physicien et mathématicien grec
(287-212 av. J.C.)
"Traité des corps flottants"

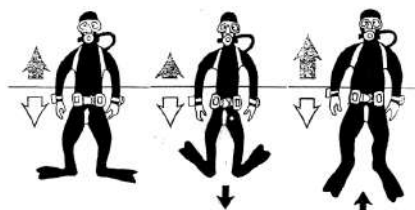
$$\vec{F}_A = -M_{\text{fluide(s) déplacé(s)}} \vec{g}$$

« La force (poussée) d'Archimède est égale et opposée au poids du fluide déplacé »

Notion de « poids apparent » pour un objet dans un fluide

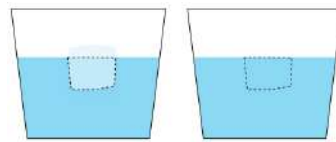
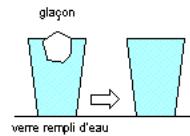
$$P_{\text{app}} = P - F_A$$

C'est le poids diminué de la poussée d'Archimède



Thermomètre de Torricelli

Glaçon qui fond dans l'eau

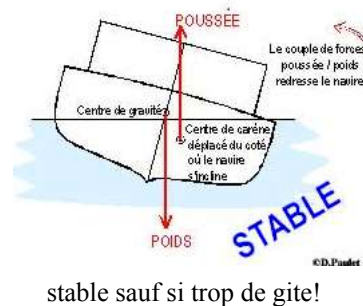
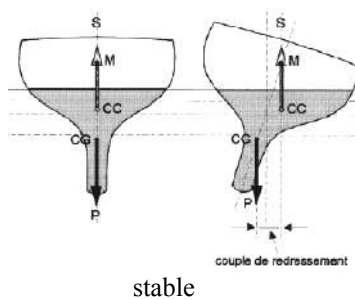


Flottaison et stabilité des bateaux

2 points importants :

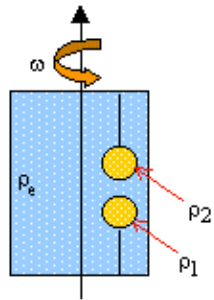
- Point d'application du poids : *centre de gravité*
- Point d'application de la poussée d'Archimède : *centre de poussée*
ou *centre de carène*

Centre de gravité au-dessous du centre de carène :
condition suffisante de stabilité, mais pas condition nécessaire de stabilité

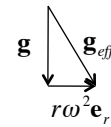
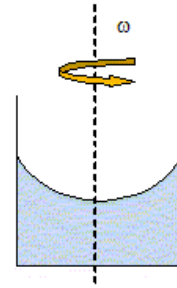


Hydrostatique en rotation (référentiel non galiléen)

ou « Archimède m'a trompé » ?



$$\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} + r\omega^2 \mathbf{e}_r$$



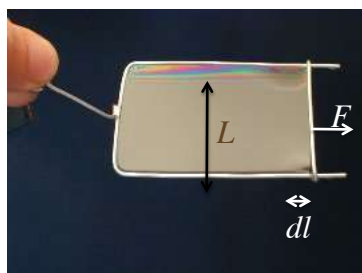
Chapitre V – La tension de surface

Notion de *tension de surface* ou *tension superficielle* ou *énergie de surface* ou *énergie interfaciale*



C'est l'énergie liée à l'existence d'une surface (ou d'une interface)

Cette énergie est associée à une force



Exemple d'un "film de savon"
(eau savonneuse)

La variation d'énergie W correspond au travail de la force F correspondante

$$dW = Fdl = 2\gamma Ldl = 2\gamma dS$$

Le paramètre γ est la **tension de surface**

! C'est une énergie par unité de surface

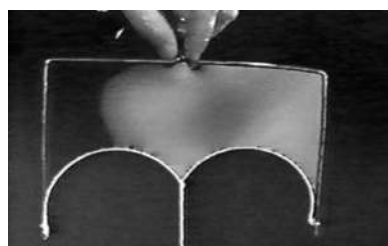
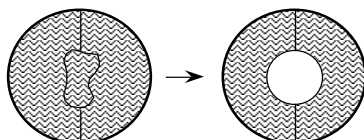
ou une force par unité de longueur

Elle s'exprime donc en $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ou $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

NB : Le facteur 2 vient ici de l'existence de 2 surfaces, l'une en dessus l'autre en dessous du film de savon (eau savonneuse)

<https://www.youtube.com/watch?v=1MAAnBrtsi58>

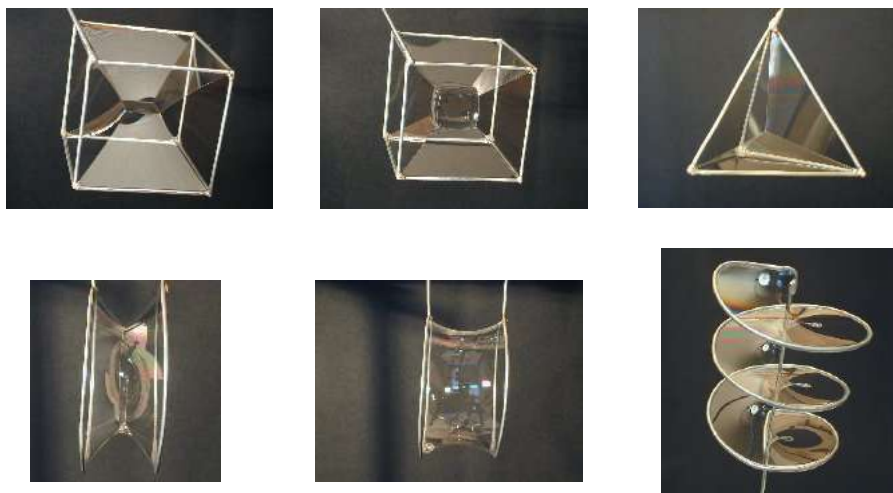
Manifestation de la tension de surface



Le film de savon tend à minimiser sa surface (en contact avec l'air)
pour minimiser son énergie (d'interaction avec l'air)

Belle vidéos réalisées par Amaco à regarder sur
<https://www.youtube.com/watch?v=v-R1mJ2gKDw>
<https://www.youtube.com/watch?v=k29bmnw5Mow>

surfaces minimales

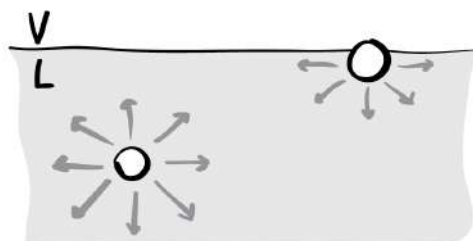


1. Origine microscopique

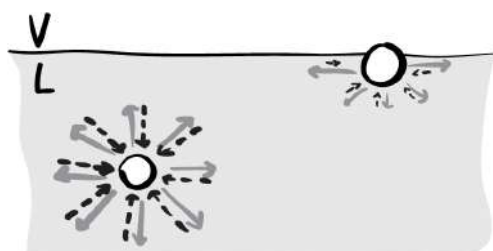
L'origine de la tension de surface réside dans les forces intermoléculaires : les molécules à la surface ont un déficit de voisins, ce qui augmente leur énergie

Mais le lien entre vision microscopique et force ou énergie de surface macroscopique n'est pas si simple à bien comprendre finement, comme exposé dans l'article "Why is surface tension a force parallel to the interface?" de A. Marchand, J. H. Weijst, J. H. Snoeijer, et B. Andreotti paru en 2011 dans Am. J. Phys. 79, 999-1008

Par exemple, on peut souvent voir la représentation suivante, faisant apparaître deux molécules, situé l'une en surface et l'autre en volume, et les forces attractives s'exerçant sur chacune d'entre elle

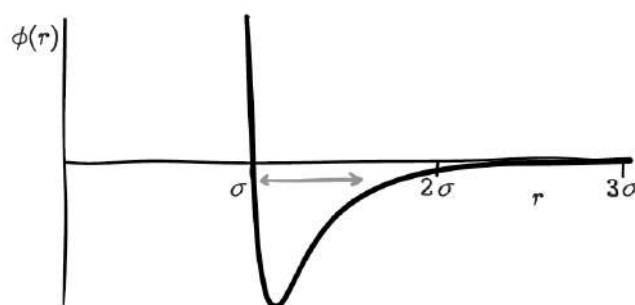


Cette représentation basée sur les forces attractives peut conduire à penser que la force de tension de surface sera perpendiculaire à l'interface, ce qui est erroné.

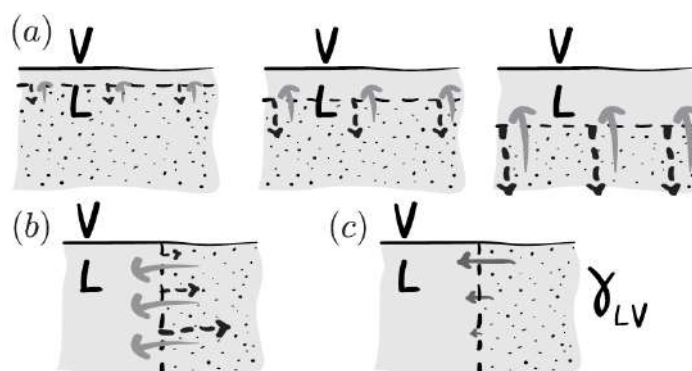


Cette représentation plus correcte fait apparaître non seulement les forces attractives mais aussi les forces répulsives

Les forces intermoléculaires ont en effet une partie attractive et une partie répulsive, avec un potentiel associé de type Lennard-Jones. Les fluctuations thermiques conduisent les distances moléculaires à fluctuer plus ou moins autour de la valeur d'équilibre



L'origine différente des forces attractives et répulsives entraîne une évolution spatiale différentes de celle-ci qui permet de comprendre l'origine de cette force qui apparaît localisée en surface et tangentielle à celle-ci

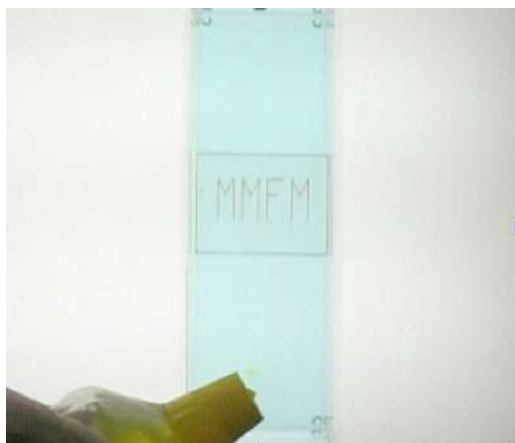
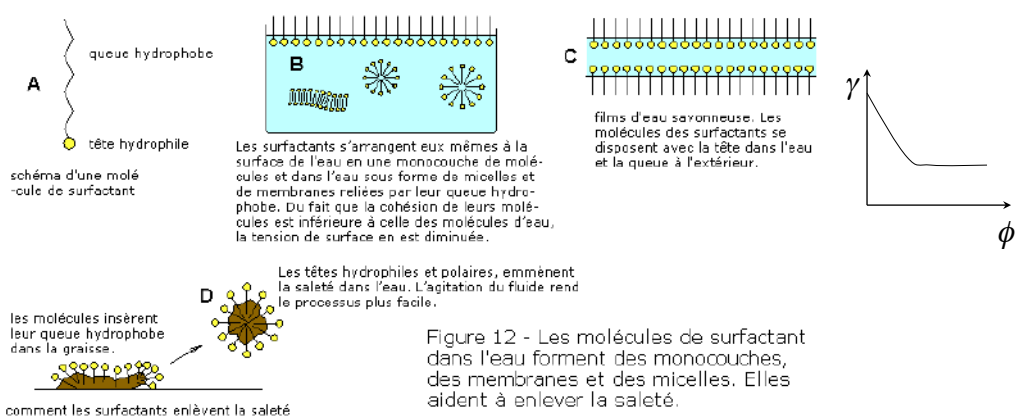


La figure ci-dessus schématise les forces attractives (flèches grises) et répulsives (flèches noires pointillées) exercées par la partie liquide grise sur la partie liquide grise mouchetée. En supposant que les forces répulsives (de contact) sont isotropes, il apparaît alors une force attractive nette au voisinage de la surface.

Les tensioactifs

L'ajout dans l'eau de molécules bipolaires, avec une extrémité hydrophile et une extrémité hydrophobe, a pour conséquence d'abaisser la tension de surface. C'est le cas des savons, détergents... qui sont des "tensioactifs".

Ces molécules sont naturellement présentes à la surface de l'eau. Mais au delà d'une valeur critique ϕ^* de la concentration ϕ , appelée concentration micellaire critique (CMC), ces molécules forment en volume des structures appelées micelles.



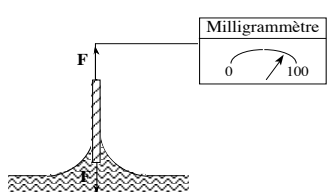
Carlo Marangoni
physicien italien
(1840-1925)

L'ajout d'une goutte de tensio-actif à un endroit de la surface de l'eau a pour effet d'abaisser tension de surface à cet endroit et d'induire un écoulement d'eau à la surface vers les zones où la tension de surface est plus forte. Cet effet d'écoulement par gradient de tension de surface est appelé "effet Marangoni".

2. Mesure par la méthode d'arrachement



Méthode de la lame de Wilhelmy (ou de l'anneau du Noüy)



$\gamma = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ pour l'eau pure
 $\gamma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ pour l'éthanol pur

à l'arrachement (quasi-statique) :

$$F = 2L\gamma \quad \text{où } L \text{ est la longueur de la lame}$$

pour un liquide parfaitement mouillant (cf § 4).

Plus généralement, pour un liquide partiellement mouillant

$$F = 2L\gamma \cos \theta \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle de contact du liquide sur la lame (cf § 4)}$$

Conséquence de la tension superficielle



<https://www.youtube.com/watch?v=uaEX7sgwjW8>



araignée d'eau (gerris)

<https://www.youtube.com/watch?v=1HxEW2Kc-Yc>

3. Loi de Laplace

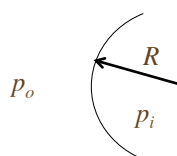
La **loi de Laplace** exprime le saut de pression Δp à la traversée d'une interface courbe dû à l'existence de la tension de surface γ



Pierre Simon Laplace
mathématicien français
(1749-1827)

$$\Delta p = \frac{\gamma}{R}$$

à la traversée d'une interface
de rayon de courbure R
entre deux fluides immiscibles

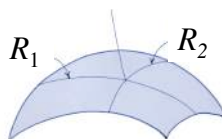


$$p_i \neq p_o$$

$$p_i > p_o$$

Plus généralement, à la traversée d'une interface quelconque caractérisée par ses 2 rayons de courbure R_1 et R_2

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

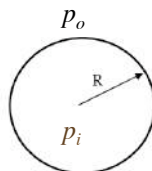


R_1 et R_2 sont de même signe si les deux centres de courbures sont du même côté de l'interface

R_1 et R_2 sont de signe opposé si les deux centres de courbures sont de chaque côté de l'interface

En particulier, pour une sphère de rayon R (goutte ou bulle)

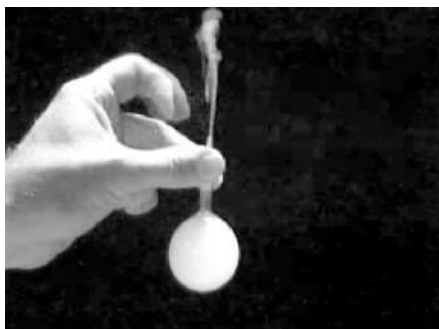
$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$



$$p_i \neq p_o$$

$$p_i > p_o$$

Manifestations de la loi de Laplace



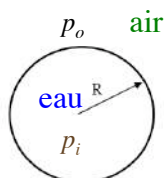
$$p_i > p_o$$



la petite bulle se vide dans la grosse,
l'écoulement d'air allant des hautes
pressions (régnant dans la petite bulle)
vers les basses pressions (régnant dans la
grosse bulle)

Cas d'une **goutte** d'eau dans l'air

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

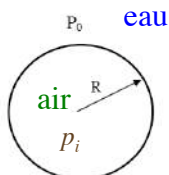


$$p_i \neq p_o$$

$$p_i > p_o$$

Cas d'une **bulle** d'air dans l'eau

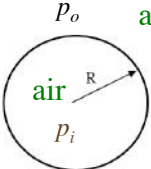
$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$



$$p_i \neq p_o$$

$$p_i > p_o$$

Cas d'une **bulle** d'air dans l'air (bulle de savon)

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R}$$


$p_i \neq p_o$
 $p_i > p_o$

Cas d'une différence de pression nulle à la traversée d'une interface courbe



$$\Delta p = 2\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad \text{avec } R_2 = -R_1$$

4. Angle de contact entre 3 phases (mouillage)

Notion de *ligne triple* :

c'est la ligne qui sépare les 3 phases en présence (liquide, solide, gas (vapeur))

Notion d'*angle de contact* (θ) :

sa valeur est régie par les valeurs des 3 tensions de surface

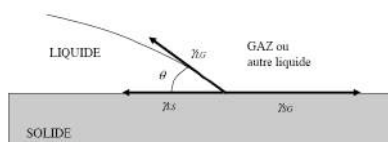
γ_{SL} , γ_{SG} et γ_{LG}

L'équilibre de la ligne de contact (ligne triple) est en effet donnée par

$$\gamma_{SL} - \gamma_{SG} + \gamma_{LG} \cos \theta = 0$$

loi d'Young-Dupré

Attention à avoir conscience du fait que le dessin associé souvent fait (ci-dessous) est incomplet



Thomas Young
physicien et médecin britannique
(1773-1829)

On distingue les cas *mouillants* ($\theta < \pi/2$) ou *non mouillants* ($\theta > \pi/2$) selon la valeur de donnée par les 3 tensions de surface

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}}$$



Si $\gamma_{SG} - \gamma_{SL} > \gamma_{LG}$, θ n'est pas défini. C'est le cas du mouillage total où existe un très mince film de "prémouillage" au-delà de la ligne de contact macroscopique visible.

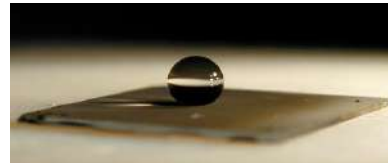
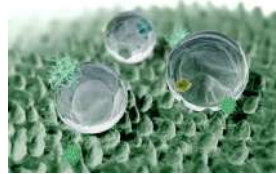


Goutte d'eau posée sur une plaque de verre propre ou non

<https://www.youtube.com/watch?v=-HCgc51noaA>

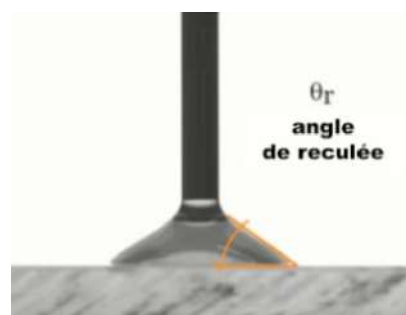
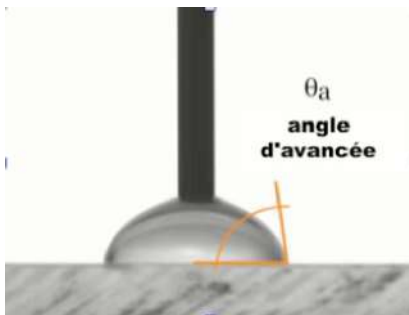


Goutte d'eau sur feuille de lotus

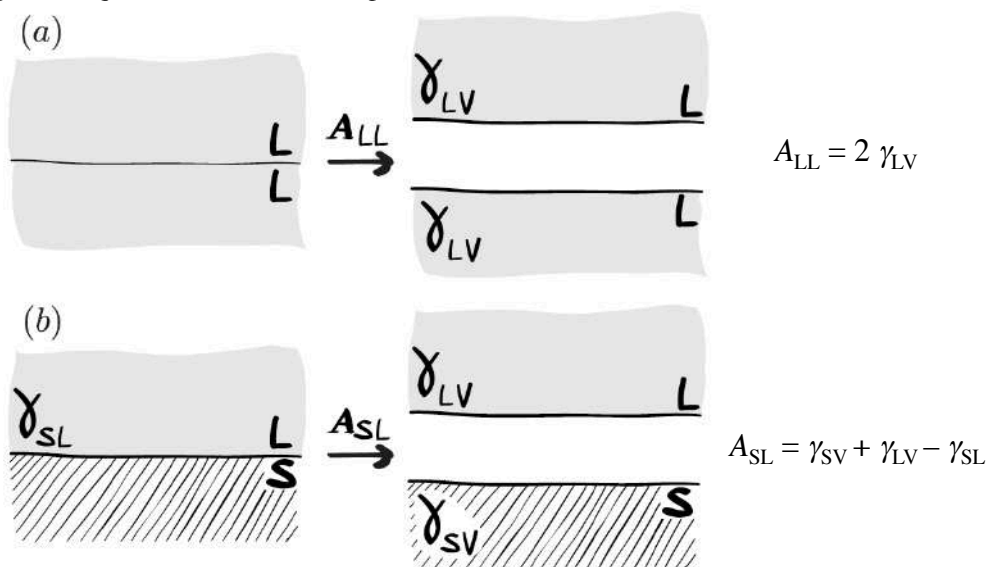


Goutte d'eau sur surface microtexturée

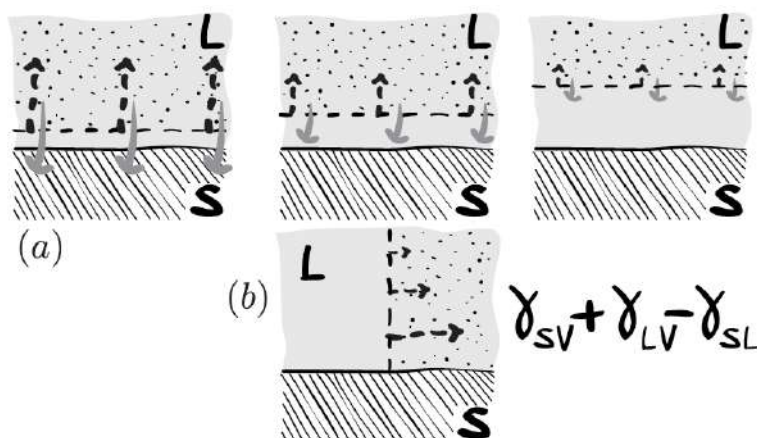
Angle de contact en dynamique :
sa valeur dépend de la vitesse V , ou plus exactement du nombre capillaire $Ca = \eta V / \gamma$



Essayons de mieux comprendre microscopiquement les situations impliquant 3 phases, liquide (L), solide (S) et vapeur (V)



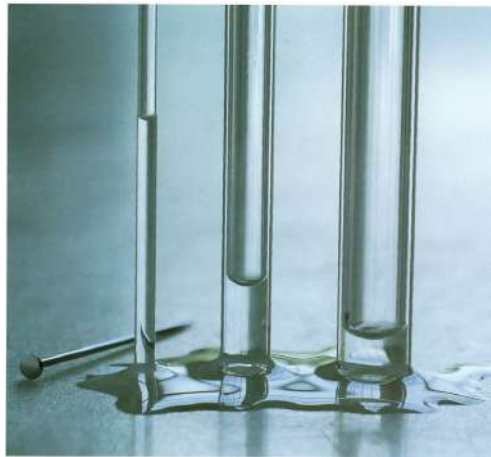
Les forces capillaires induites par la présence de l'interface solide-liquide ne se réduisent pas à γ_{SL}



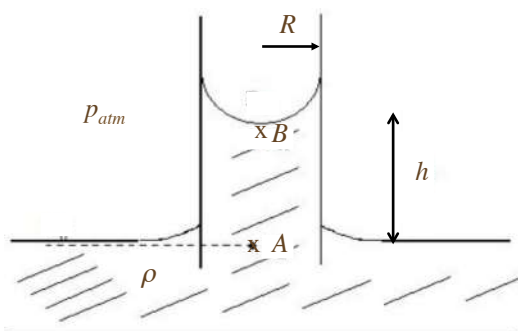
La figure ci-dessus schématise les forces attractives (flèches grises) et répulsives (flèches noires pointillées) exercées par la partie solide (hachurée) sur la partie liquide grise mouchetée. En supposant que les forces répulsives (de contact) sont isotropes, il apparaît alors une force répulsive nette au voisinage de la surface.

5. Ascension capillaire

C'est l'ascension d'un liquide (mouillant) dans un "mince" interstice



Hauteur h d'ascension d'un liquide dans un tube fin de rayon R
pour un liquide totalement mouillant



$$P_A = P_{atm}$$

$$P_B = P_A - \rho gh \quad \text{et} \quad P_B = P_{atm} - \frac{2\gamma}{R}$$

$$\rho gh = \frac{2\gamma}{R}$$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g R}$$

Loi de Jurin*
(1718)

La hauteur d'ascension est d'autant plus grande
que le tube est fin

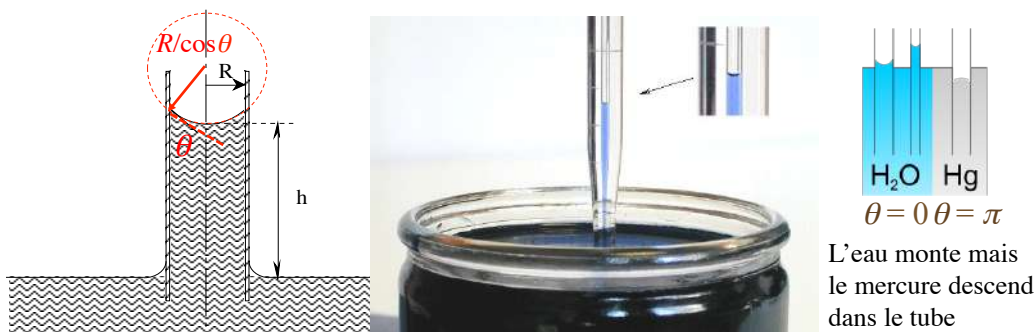
*James Jurin
médecin anglais
(1684-1750)

Plus généralement, pour un angle de mouillage du liquide sur la paroi du tube $\theta \neq 0$, la hauteur d'ascension capillaire est

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g R}$$

Loi de Jurin*
(1718)

$R/\cos\theta$ est le rayon de courbure du ménisque dans le tube



$\theta = 0$ pour un liquide totalement mouillant (cas de l'eau sur du verre propre)
 $\theta = \pi$ pour un liquide totalement non mouillant (cas du mercure sur du verre)
 $0 < \theta < \pi$ pour un liquide partiellement mouillant
(cas de l'eau sur du verre pas propre ou sur du plastique)

6. La longueur capillaire

La longueur capillaire intervient dans toutes les situations où les forces de tension de surface et de gravité sont présentes.

Dans le cas d'une goutte de rayon R , ces deux forces sont semblables si

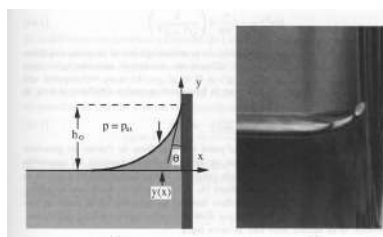
$$\rho g R^3 \sim \gamma R \quad \text{soit} \quad R^2 \sim \frac{\gamma}{\rho g}$$

La longueur capillaire est alors définie telle que

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

$l_c \approx 3$ mm pour l'eau
 $l_c \approx 2$ mm pour l'éthanol

On retrouve naturellement cette longueur capillaire dans le ménisque qui se forme à la paroi verticale d'un récipient



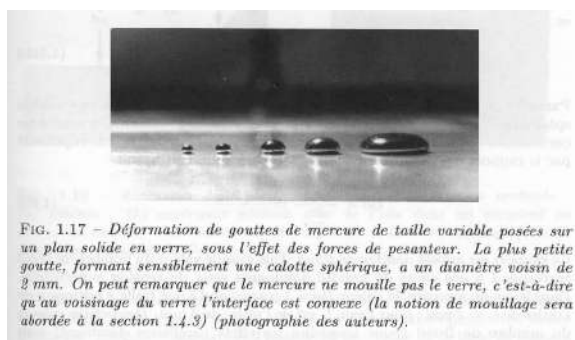
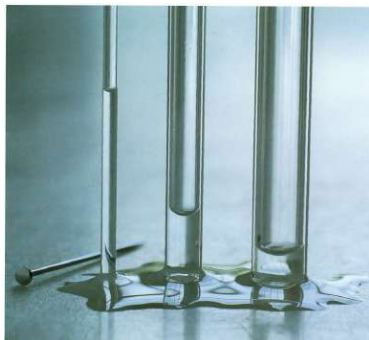


FIG. 1.17 - Déformation de gouttes de mercure de taille variable posées sur un plan solide en verre, sous l'effet des forces de pesanteur. La plus petite goutte, formant sensiblement une calotte sphérique, a un diamètre voisin de 3 mm. On peut remarquer que le mercure ne mouille pas le verre, c'est-à-dire qu'au voisinage du verre l'interface est convexe (la notion de mouillage sera abordée à la section 1.4.3) (photographie des auteurs).

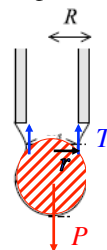
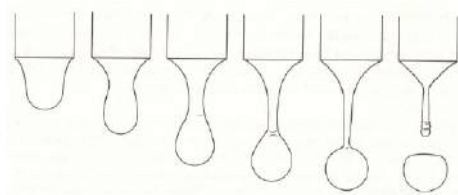
La loi de Jurin est valable pour des tubes suffisamment fins ($R < l_c$)

Les gouttes posées sont (hémi)sphériques si elles sont suffisamment petites ($V^{1/3} < l_c$)

Sinon ($V^{1/3} > l_c$), elles sont aplaties (de hauteur l_c)

7. La goutte « pendante »

Le volume V (et la forme) d'une goutte de liquide se formant par gravité à l'extrémité d'un tube vertical est lié à la tension de surface du liquide correspondant



Les forces sur la goutte sont :

- son poids (vertical vers le bas) : $P = \rho Vg$
- tension de surface (vertical vers le haut) : $T = 2\pi r\gamma$ (avec $r < R$)

$$P = T \quad \text{à l'équilibre}$$

$$V = \frac{kR\gamma}{\rho g} \quad \text{loi de Tate}$$

où k est un coefficient qui dépend du mouillage du liquide dans le tube

Cette loi n'est valable que si le rayon du tube est suffisamment petit ($R < l_c$)

Chapitre VI – Fluides parfaits

Un **fluide parfait** est un fluide de **viscosité nulle** ($\eta = 0$)

! Un gaz parfait n'est pas un fluide parfait

1. Equation d'Euler et conditions aux limites

L'équation du mouvement d'un fluide quelconque

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \text{div}[\sigma'] + \rho \vec{g}$$

se simplifie pour un fluide parfait en

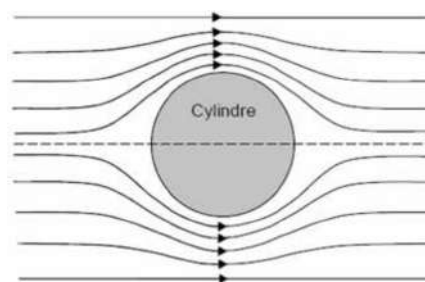
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

Equation d'Euler

Cette équation est non-linéaire mais réversible en temps
Elle peut se résoudre en tenant compte des conditions aux limites
aux parois ou interfaces, ou loin d'elles



Euler
(1707-1783)



lignes de courant d'un fluide parfait
autour d'un cylindre fixe

Conditions aux limites pour les fluides parfaits

conditions **cinématiques** sur une paroi ou à l'interface $\xi(x,y,z,t)$ de deux fluides 1 et 2

- continuité de la vitesse normale
 - $\mathbf{u}_{\text{fluide}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\text{paroi}} \cdot \mathbf{n}$ à une paroi
 - $\mathbf{u}_1(\xi) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2(\xi) \cdot \mathbf{n}$ à une interface en ξ
- pas de condition sur la vitesse tangentielle
 - il peut y avoir discontinuité de la vitesse tangentielle
 - cette discontinuité est appelée **vitesse de glissement**

conditions **dynamiques** à l'interface de deux fluides

- continuité de la pression à la traversée d'une interface plane

$$p_1(\xi) = p_2(\xi)$$

- discontinuité de la pression à la traversée d'une interface courbe

$$\Delta p = \gamma_{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Loi de Laplace} \\ R_{1,2} \text{ rayons de courbure de l'interface} \end{array}$$

2. Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli exprime la **conservation de l'énergie** pour tout fluide parfait (non dissipatif) en partant de l'équation d'Euler.

Cette relation s'écrit facilement pour un écoulement **stationnaire et incompressible** dans le champ de pesanteur.

En régime stationnaire, l'équation d'Euler se réduit à

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$$

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}(p + \rho gz) \quad (\text{pour un axe } z \text{ vertical vers le haut})$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (\text{pour un fluide incompressible})$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}u^2 \right) = \vec{u} \wedge \text{rot} \vec{u} \quad \text{car} \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(u^2) - \vec{u} \wedge \text{rot} \vec{u}$$

« charge » C

$\vec{\nabla}C \cdot d\vec{l} = 0$ et donc $C = \text{cte}$ le long d'une ligne de courant car $d\vec{l} \parallel \vec{u} = 0$

La **relation de Bernoulli** s'écrit $\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho gz = cte$



Bernoulli
(1700-1782)

le **long d'une ligne de courant** d'un écoulement stationnaire incompressible
Cette relation exprime la conservation de l'énergie d'un fluide parfait en écoulement (conservation de la « charge »)

A noter que la même relation s'applique également
le **long d'une ligne de vorticité** ($d\vec{l} // \vec{rot}\vec{u} = 0$)

Cette charge (C) est différente pour les différentes lignes de courant ou lignes de vorticité, sauf si l'écoulement est **irrotationnel** ($\vec{rot}\vec{u} = 0$) : dans ce cas particulier, **la charge est la même dans tout l'écoulement**.

$\rho u^2/2 + p + \rho gh$ est la pression totale,
ou la pression de stagnation
ou la pression d'arrêt
(c'est la pression en un point de la ligne de courant où la vitesse est nulle)
 $\rho u^2/2$ est la pression dynamique
 p est la pression statique
 ρgh est la pression hydrostatique

Dans le cas d'un régime **instationnaire**, l'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

s'écrit

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \quad \text{pour un fluide incompressible}$$

Si l'écoulement est irrotationnel alors la vitesse dérive d'un potentiel ϕ
($\vec{rot}\vec{u} = 0$) ($\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$)

l'équation d'Euler s'écrit alors

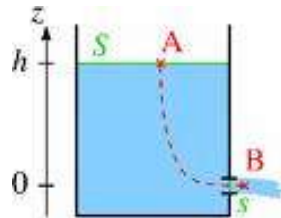
$$\vec{\nabla} \left(\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + gz}_{\text{« charge » } C(t)} \right) = 0$$

Dans le cas d'un écoulement **instationnaire** mais **irrotationnel** d'un **fluide parfait incompressible**, la charge varie dans le temps mais est homogène dans tout l'écoulement

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho gz = cte(t) \quad \text{relation de Bernoulli généralisée}$$

3. Applications de la relation de Bernoulli

Vidange d'un récipient (expérience de Torricelli)



Torricelli
physicien et mathématicien italien
(1608-1647)
De Motu Aquarum (1641)

$$\frac{1}{2} \rho u_A^2 + p_A + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho u_B^2 + p_B + \rho g z_B$$

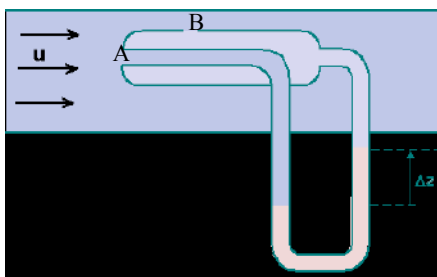
avec $p_A = p_{atm}, p_B = p_{atm}$ et $u_A \ll u_B$ ($S/s \gg 1$)

$$\frac{1}{2} \rho u_B^2 = \rho g (z_B - z_A)$$

$$U = \sqrt{2gh}$$



Le tube de Pitot



Henri Pitot
(1695-1771)
ingénieur hydraulique français
*"Description d'une machine pour mesurer la vitesse
des eaux courantes et le sillage des vaisseaux"*
Académie Royale des Sciences (1732)

$$\frac{1}{2} \rho u_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho u_B^2 + p_B \quad \text{avec } u_A = 0 \text{ et } u_B \approx U$$

$$\frac{1}{2} \rho U^2 = p_A - p_B$$

$$U = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

Le tube de Pitot permet de mesurer la vitesse U par la mesure de Δp



Utilisation du tube de Pitot

aviation



Cessna 172



automobile

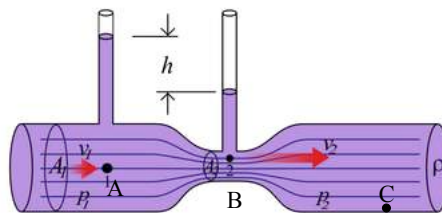


tube de Pitot montée sur la voiture de formule 1 Renault de Fernando Alonso (2005)



Station météo

Effet Venturi



tube de Venturi
(tube avec resserrement local)



Giovanni Battista Venturi
(1746-1822)
prêtre et physicien italien

$$\frac{1}{2} \rho u_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho u_B^2 + p_B = \frac{1}{2} \rho u_C^2 + p_C \quad (z = \text{cte})$$

$$S_B < S_A \Rightarrow u_B > u_A \Rightarrow p_B < p_A \quad : \text{ c'est l'effet Venturi} \quad \Delta p \propto \rho U^2$$

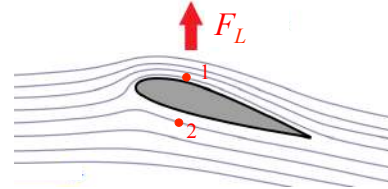
$$S_C = S_B \Rightarrow u_C = u_A \Rightarrow p_C = p_A \quad : \text{ pas vrai en pratique car fluide non parfait (perte de charge)}$$

Le tube de Venturi est souvent utilisé en pratique dans les carburateurs, trompes à eau, lances de pompiers (émulsion), détendeurs de plongée, tuyères de moteurs à réaction

Portance d'une aile

$$\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1$$

$$\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2$$



$$\frac{1}{2}\rho U_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + p_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) \approx \rho U_\infty(U_2 - U_1)$$

La force de portance de l'aile d'extension l s'écrit donc simplement

$$F_L = L \int_0^l (p_1 - p_2) dl \approx \rho U_\infty L \int_0^l (U_2 - U_1) dl \approx -\rho U_\infty L \Gamma$$

où Γ est la circulation de la vitesse autour de l'aile (dans le sens trigo)

4. Écoulements potentiels 2C2D

Les écoulements potentiels sont des écoulements irrotationnels ($\text{rot} \vec{u} = 0$)

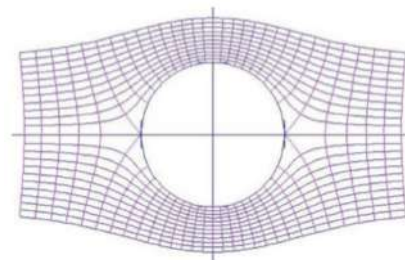
car la vitesse dérive alors d'un potentiel ϕ : $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$ $u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

Si l'écoulement est également incompressible ($\text{div} \mathbf{u} = 0$), le potentiel des vitesses ϕ satisfait alors à l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$ qui est linéaire

$$(\text{car } \text{div}(\vec{\nabla} \phi) = 0)$$

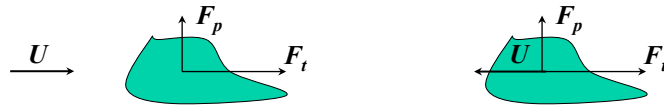
Les isopotentielles ($\phi = \text{cte}$) sont perpendiculaires aux lignes de courant ($\psi = \text{cte}$)

A noter que la fonction de courant ψ satisfait ici également à l'équation de Laplace $\Delta \psi = 0$ (car $\text{rot}(\text{rot} \psi \mathbf{e}_z) = 0$)



lignes de courant et isopotentielles
de l'écoulement autour d'un cylindre fixe

5. Forces de traînée et portance



Force de traînée F_t (“drag force” F_D)

force parallèle à l’écoulement exercée sur un corps en mouvement relatif

Force de portance F_p (“lift force” F_L)

force perpendiculaire à l’écoulement exercée sur un corps en mouvement relatif

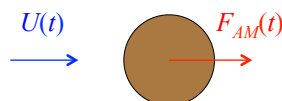
En régime **stationnaire**, un fluide parfait n’exerce **pas de force de traînée** sur un obstacle. C’est le paradoxe de d’Alembert. On a vu qu’une force de portance est cependant possible.

En régime **instationnaire**, il existe une force de traînée : la **force de masse ajoutée** qui est liée à l’accélération d’un volume fluide proportionnel au volume de l’objet avec un coefficient qui dépend de la forme de l’objet

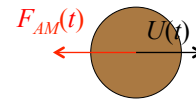
$$F_{AM} = \underbrace{C_{AM} \rho V_{objet}}_{\text{masse ajoutée}} \frac{\partial U}{\partial t}$$

masse ajoutée

Cette force peut être calculée, à partir du champ de vitesse ou du champ de pression)



Force de masse ajoutée sur un objet fixe dans un écoulement instationnaire



Force de masse ajoutée sur un objet en mouvement instationnaire $U(t)$

Le concept de masse ajoutée a été introduit par en Bessel (1828) puis par Stokes (1851) pour mieux rendre compte du mouvement de pendules dans les fluides

Considérons un objet à la vitesse U . Le champ de vitesse autour de lui est $\mathbf{u}(x,y,z) = Uf(x,y,z)$ où $f(x,y,z)$ est une fonction sans dimension correspondant à la distribution spatiale de vitesse.

L'énergie cinétique du fluide liée au mouvement de l'objet est

$$E_c = \int_{\text{fluide}} \frac{1}{2} \rho u^2 dV = \frac{1}{2} M_{\text{fluide}} U^2 \quad \text{où} \quad M_{\text{fluide}} = \int_{\text{fluide}} \rho f^2(x,y,z) dV$$

Si U varie, l'énergie cinétique du fluide E_c varie et sa variation dE_c est alors nécessairement reliée au travail d'une force, qu'on notera ici F_{AM}

$$F_{AM} U dt = dE_c$$

$$F_{AM} U = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M_{\text{fluide}} U^2 \right)$$

$$F_{AM} = M_{\text{fluide}} \frac{dU}{dt} \quad \text{si } f(x,y,z) \text{ ne varie pas avec la vitesse et ne dépend donc pas du temps}$$

Il est usage d'écrire la masse de fluide correspondante M_{fluide} en fonction du volume de l'objet V_{objet} , en introduisant un coefficient sans dimension noté C_{AM}

$$F_{AM} = C_{AM} \rho V_{\text{objet}} \frac{dU}{dt}$$

F_{AM} est la force de « masse ajoutée » et C_{AM} est le coefficient de « masse ajoutée »

$$C_{AM} = \frac{\int_{\text{fluide}} f^2(x,y,z) dV}{V_{\text{objet}}}$$

La valeur de C_{AM} dépend de la forme du champ de vitesse qui dépend lui-même de la forme de l'objet, par exemple $C_{AM} = 1/2$ pour une sphère, $C_{AM} = 1$ pour un cylindre...

Pourquoi ce nom de « masse ajoutée » ? La dynamique d'un objet de masse M_{objet} est gouvernée par la relation fondamentale de la dynamique (RFD) qui s'écrit

$$M_{\text{objet}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \sum \mathbf{F}$$

Dans toute les forces qui s'exercent sur l'objet en mouvement dans un fluide, il faut tenir compte de la force de masse ajoutée qui est résistante :

$$M_{objet} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \sum \mathbf{F} - C_{AM} \rho V_{objet} \frac{d\mathbf{U}}{dt}$$

La RFD peut alors s'écrire

$$\left(M_{objet} + \underbrace{C_{AM} \rho V_{objet}}_{M_{fluide}} \right) \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \sum \mathbf{F}$$

Dans la dynamique de l'objet intervient donc sa masse mais aussi cette masse de fluide qui s'ajoute à sa masse, d'où le nom de **masse ajoutée**.

Cette masse ajoutée est bien sûr d'autant plus importante que la masse de l'objet est faible et il est alors crucial de la prendre en compte pour bien décrire le mouvement de l'objet. C'est notamment le cas pour des bulles par exemple!

Chapitre VII – Fluides visqueux

Un fluide parfait n'a pas de viscosité, c'est-à-dire que deux couches de fluides parfaits peuvent alors s'écouler côte-à-côte à des vitesses différentes sans interagir. Pour un fluide réel, les collisions entre molécules des deux couches voisines de par l'agitation thermique entraîne un échange de quantité de mouvement. La viscosité est le coefficient qui caractérise cette diffusion de la quantité de mouvement.

Avant d'introduire ce coefficient de viscosité dans la relation entre contraintes et gradients de vitesse, nous allons caractériser le tenseur des gradients de vitesse comme nous avons déjà caractérisé au chapitre III le tenseur des contraintes pour un fluide

1. Tenseurs des gradients de vitesse

Le tenseur des gradients de vitesse est

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \quad dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

1.1 Décomposition du tenseur des gradients de vitesse

On décompose usuellement le tenseur des gradients de vitesse en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$[G] = [e] + [\omega] \quad \text{avec} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{symétrique}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{anti-symétrique}$$

Par construction, le tenseur $[e]$ est symétrique ($e_{ij} = e_{ji}$)
et le tenseur $[\omega]$ est anti-symétrique ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$)

1.2 Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur des déformation pures

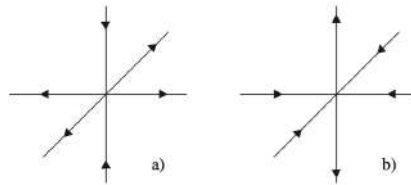
Le tenseur symétrique $[e]$ est caractérisé par 6 coefficients

Le tenseur $[e]$ étant symétrique, il est diagonalisable et s'écrit alors dans la base orthonormée construite sur ses vecteurs propres

$$[e] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

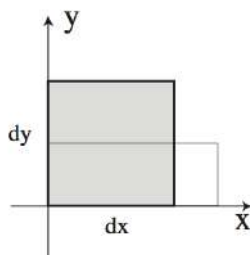
Si l'écoulement est incompressible, $(\text{div} \vec{v} = 0)$ $\text{trace}[e] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$
et donc $a + b + c = 0$. Il y a alors

soit une direction contractante (e.g. $c < 0$) et deux dilatantes ($a < 0$ et $b < 0$) : figure a
soit une direction dilatante (e.g. $c > 0$) et deux contractantes ($a > 0$ et $b > 0$) : figure b



Exemple à 2D de l'évolution d'un petit carré de fluide dans un écoulement caractérisé par le tenseur

$$[G] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{avec } a > 0 \text{ et } b < 0$$



Cet écoulement correspond à une déformation pure

1.2 Partie anti-symétrique de $[G]$ ou tenseur des rotations pures

Le tenseur anti-symétrique $[\omega]$ est caractérisé par 3 coefficients

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

Ces 3 coefficients sont contenus dans le **vecteur vorticité** $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$

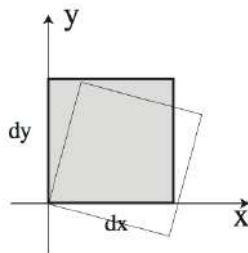
$$\begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2\omega_{yz} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_{xz} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2\omega_{yx} \end{cases}$$

Ce vecteur vorticité qui caractérise la rotation locale du fluide est très important dans la dynamique des tourbillons

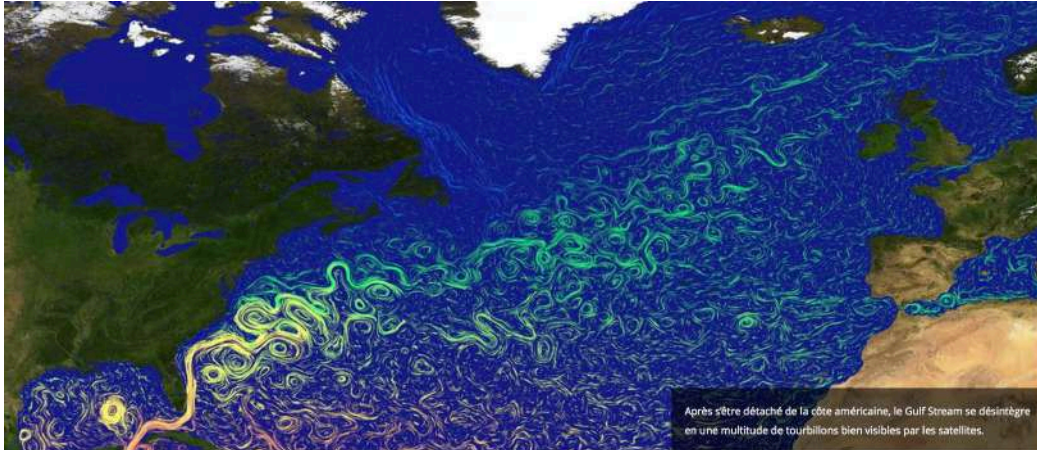
A noter qu'une rotation pure ne déforme pas la particule fluide et ne dissipe donc pas d'énergie

Exemple à 2D de l'évolution d'un petit carré de fluide dans un écoulement caractérisé par le tenseur

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a > 0$$

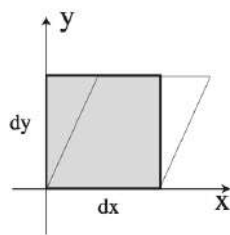


Cet écoulement correspond à une rotation pure



Exemple à 2D de l'évolution d'un petit carré de fluide dans un écoulement caractérisé par le tenseur

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a > 0$$



Cet écoulement correspond à un cisaillement, qui comporte à la fois de la déformation et de la rotation. En effet

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a/2 \\ a/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a/2 \\ -a/2 & 0 \end{bmatrix}$$

déformation pure rotation pure

2. Equation constitutive d'un fluide

Comme ni les mouvements locaux de translation pure et de rotation pure d'un fluide ne dissipent d'énergie, le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ ne peut dépendre que du tenseur des déformations pures $[e]$:

$$[\sigma'] = f([e])$$

Cette relation entre l'équation constitutive du fluide

La relation simple qui caractérise les fluides **newtoniens** est une relation linéaire :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}$$

entre $[\sigma']$ et $[e]$ via a priori un tenseur d'ordre 4 caractérisé donc par 81 coefficients! Heureusement, en considérant le milieu isotrope, ces coefficients se réduisent à 3 et même à 2 compte-tenu de la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ll} \right) + \zeta \delta_{ij} e_{ll}$$

où η est la **viscosité de cisaillement**

et ζ est la **viscosité de volume (ou seconde viscosité)** qui n'intervient que pour les **écoulements compressibles** pour lesquels $\text{trace}[e] = \text{div } \vec{v} \neq 0$

Si l'écoulement est **incompressible**, l'équation constitutive d'un fluide newtonien se réduit à

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où intervient seulement la viscosité de cisaillement η

3. Equation de Navier-Stokes

Dans l'équation du mouvement obtenu au chapitre III pour un fluide quelconque

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \text{div}[\sigma'] + \rho \vec{g}$$

on peut exprimer le terme $\text{div}[\sigma']$ en fonction des gradients de vitesse pour un écoulement **incompressible** de fluide **newtonien** :

$$\left\{ \text{div}[\sigma'_{ij}] \right\}_i = \sum_j \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \eta \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad \text{car } \text{div } \vec{v} = 0$$

En effet,

pour la direction $i = 1$
par exemple

$$\begin{aligned} \left\{ \text{div}[\sigma'_{ij}] \right\}_1 &= \frac{\partial \sigma'_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_3} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right] \\ &= \eta \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \right] = \eta \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right] \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

L'équation du mouvement d'un fluide newtonien incompressible s'écrit alors

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

appelée **équation de Navier-Stokes**

En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit suivant les trois directions

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

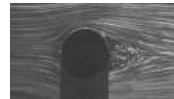
Cette équation non linéaire aux dérivées partielles se résout en tenant compte des conditions aux limites

4. Conditions aux limites

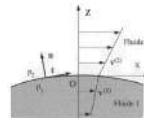
conditions *cinématiques* sur une paroi ou à l'interface $\xi(x,y,z,t)$ de deux fluides 1 et 2

- continuité de la vitesse (normale et tangentielle)

$$\mathbf{u}_{\text{fluide}} = \mathbf{u}_{\text{paroi}} \text{ à une paroi}$$



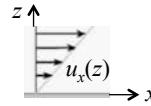
$$\mathbf{u}_1(\xi) = \mathbf{u}_2(\xi) \text{ à une interface en } \xi$$



conditions *dynamiques* sur une paroi ou à l'interface de deux fluides

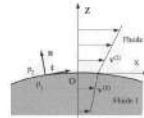
- existence d'une contrainte tangentielle à une paroi

$$\sigma_{xz}|_{paroi} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{paroi}$$



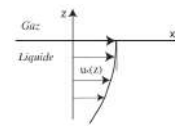
- continuité de la contrainte tangentielle à la traversée d'une interface

$$\eta_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} \Big|_{\xi} = \eta_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z} \Big|_{\xi}$$



cas particulier à une surface libre (interface entre un liquide et un gaz au repos) : pas de contrainte tangentielle

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{\xi} = 0$$



- continuité de la pression à la traversée d'une interface plane

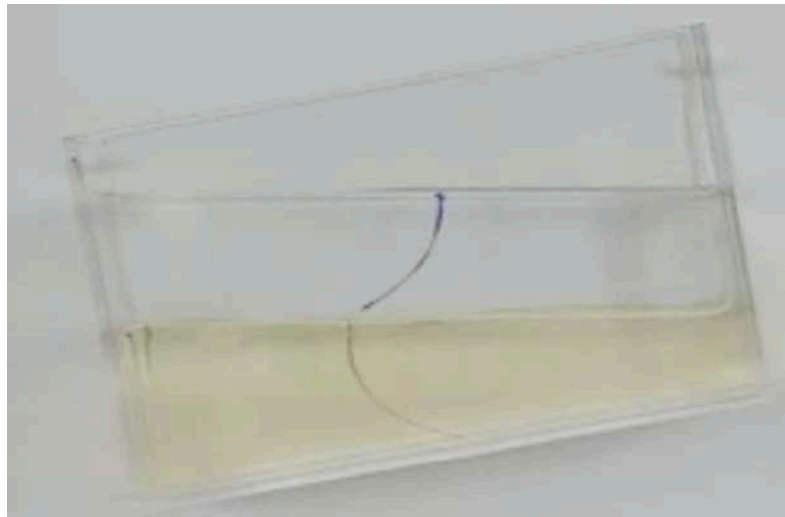
$$p_1(\xi) = p_2(\xi)$$

- discontinuité de la pression à la traversée d'une interface courbe

$$\Delta p = \gamma_{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Loi de Laplace}$$

$R_{1,2}$ rayons de courbure de l'interface

Conditions aux limites : deux liquides dans un récipient inclinable



Le plus dense (en bas) est ici visiblement plus visqueux que le moins dense (en haut)

Chapitre VIII – Ecoulements inertiels et visqueux

L'équation de Navier-Stokes pour des fluides newtoniens en écoulement incompressible

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

comporte de nombreux termes et est par conséquent difficile à résoudre.

Tous les termes n'ont cependant pas la même importance selon le type d'écoulement, et certains termes éventuellement beaucoup plus petits que d'autres pourront alors être négligés, ce qui simplifiera l'équation et sa résolution.

L'analyse de l'importance relative des termes se fait en estimant leur ordre de grandeur à partir des valeurs typiques de l'écoulement considéré : la vitesse caractéristique de l'écoulement, sa taille caractéristique, ... On peut alors écrire l'équation sous une forme adimensionnée où l'importance relative des termes apparaît sous la forme de nombres ou paramètres sans dimension

1. Le nombre de Reynolds

Considérons des situations d'écoulements non influencés par la gravité. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$

En considérant une vitesse caractéristique U et une longueur L typiques de l'écoulement, on peut adimensionner les différents termes de l'équation

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{U} \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad \tilde{t} = \frac{t}{L/U} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

avec L/U comme temps caractéristique et ρU^2 choisi ici comme pression caractéristique

$$\rho \frac{U}{L/U} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \rho \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{\rho U^2}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\eta U}{L^2} \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\eta}{\rho U L} \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

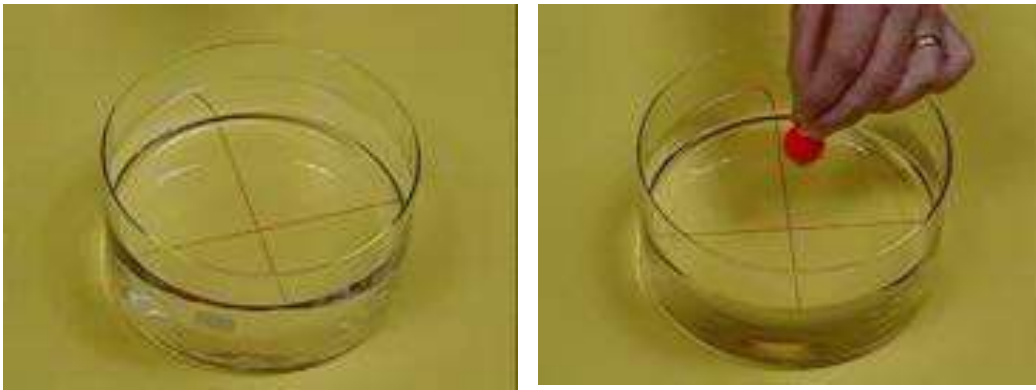
$$\text{où } \text{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

est le nombre de Reynolds
(paramètre sans dimension)

$$Re = \frac{\text{Forces ou contraintes inertielles}}{\text{Forces ou contraintes visqueuses}} = \frac{\rho U^2}{\eta U / L^2} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Re << 1 : forces inertielles négligeables devant forces visqueuses

Re >> 1 : forces visqueuses négligeables devant forces inertielles



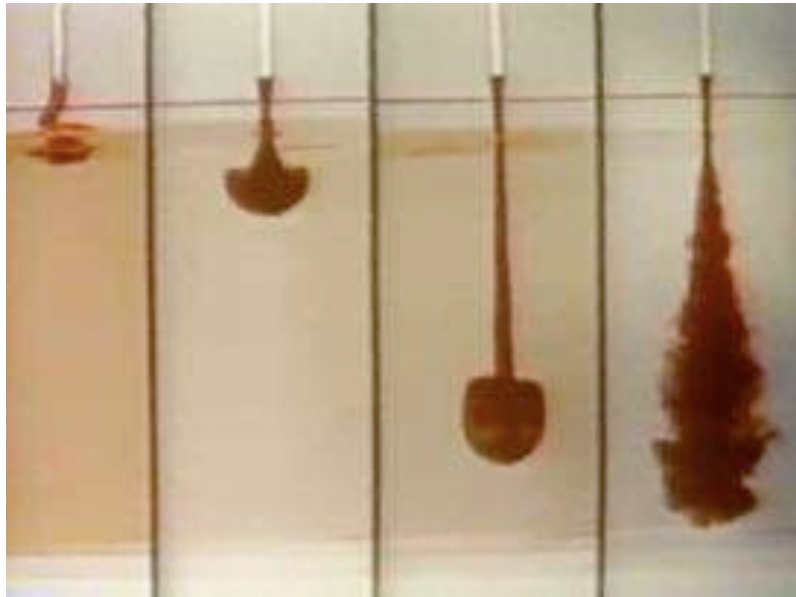
Effet du nombre de Reynolds Re d'un écoulement
exemple d'un jet liquide

Re = 0.05

Re = 10

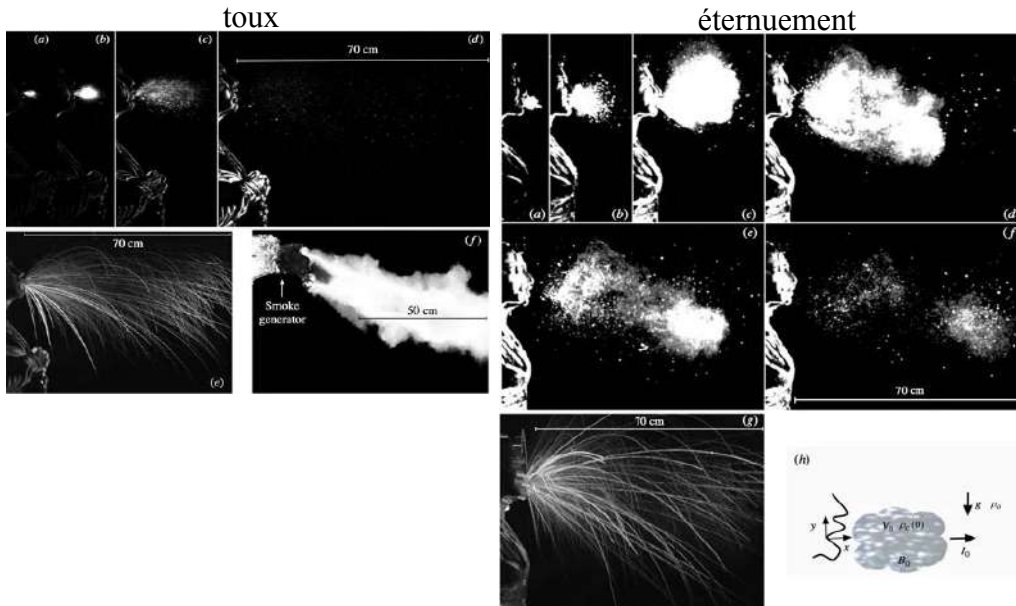
Re = 200

Re = 3000



“Violent expiratory events: on coughing and sneezing”

by Lydia Bourouiba, Eline Dehandschoewercker & John W. M. Bush (MIT, USA)
in Journal of Fluid Mechanics, vol. 745, pp. 537–563 (2014)



Nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$

pour quelques écoulements du quotidien

$\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ et $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
 $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$ et $\eta_{\text{air}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

- un ballon de foot ou une balle de ping-pong : $\sim 10^4$ - 10^5
- un cycliste ou un nageur $\sim 10^6$
- une goutte de pluie $\sim 10^3$

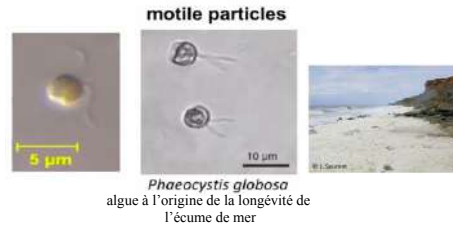
Dans tous ces exemples du quotidien, le régime d'écoulement est le régime inertiel ($Re \gg 1$)

Dans quels cas le régime d'écoulement est-il visqueux ($Re \ll 1$) ?

Écoulements à nombre de Reynolds $Re \ll 1$

- Cas des très petits objets animés de très petites vitesses, par exemple les cellules (bactéries, virus...) dans l'eau dans notre organisme ($R \approx 1 \mu\text{m}$, $U \approx 10 \mu\text{m/s}$)

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} \approx \frac{10^3 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{10^{-3}} \approx 10^{-6} \ll 1$$



- Cas des fluides très visqueux : miel ou nutella ($\eta \approx 10^4 \text{ Pa.s}$), goudron ou bitume ($\eta \approx 10^6 \text{ Pa.s}$) ou encore magma terrestre ($\eta \approx 10^{20} \text{ Pa.s}$)

2. Les régimes d'écoulements inertiel et visqueux

2.1 Les écoulements inertiels ($Re \gg 1$)

A grand nombre de Reynolds ($Re \gg 1$), l'équation de Navier-Stokes se réduit alors approximativement à

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$

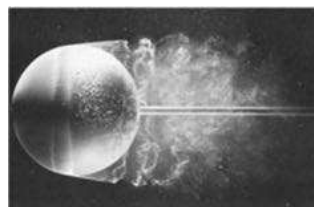
Les contraintes visqueuses étant négligées car faibles, c'est l'équation d'Euler des fluides parfaits ($\eta = 0$) qu'on retrouve.

Attention, la viscosité n'étant cependant pas strictement nulle ($\eta \neq 0$), les écoulements ne sont pas tout à fait identiques à ceux de fluides parfaits.

Par exemple, l'écoulement autour d'objets symétriques amont-aval n'est pas symétrique amont-aval et il existe une force de traînée contrairement aux cas des fluides parfaits

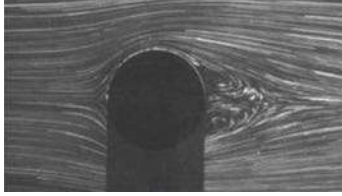


$Re \approx 55$



$Re \approx 15\,000$

Le force de traînée (et de portance) sur un objet de taille L est $F \sim \rho U^2 S$ en régime stationnaire

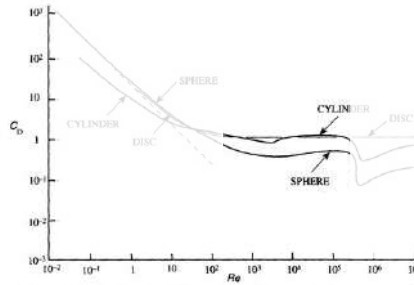


Il est d'usage d'introduire le coefficient de traînée C_x ou C_D (traînée = drag en anglais) défini tel que*

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$$

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 S$$

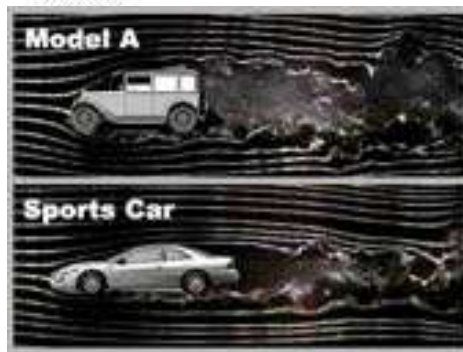
C_D est assez constant sur une grande plage de nombre de $Re \gg 1$ mais dépend de la forme des objets
 $C_D \approx 0,5$ pour une sphère
 $C_D \approx 1$ pour un cylindre ou un disque



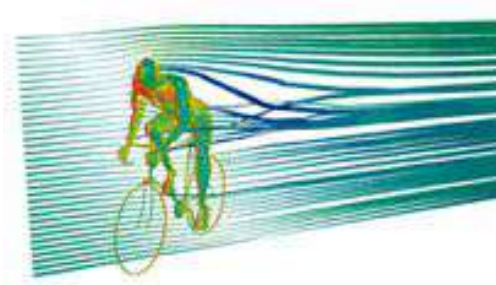
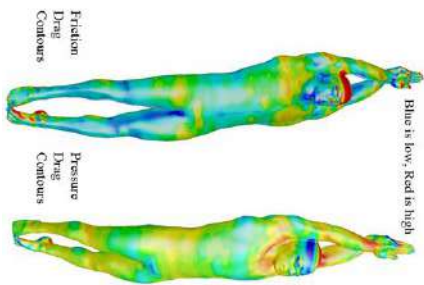
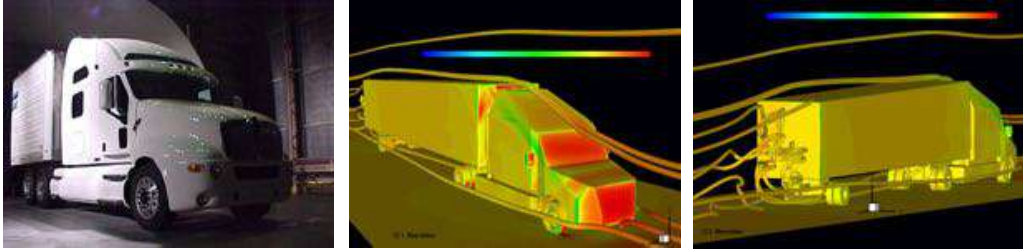
*Le coefficient de portance (lift) C_z ou C_L est introduit de manière analogue

Influence de la forme à $Re \gg 1$

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Half-sphere	0.42
Cube	1.05
Streamlined Body	0.04
Streamlined Half-body	0.09



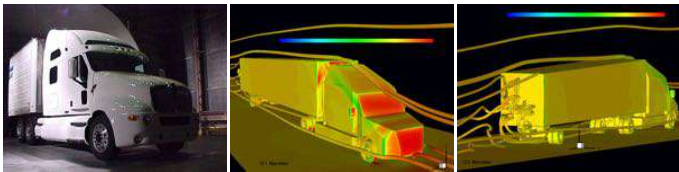
essais en soufflerie ou simulations numériques d'écoulements



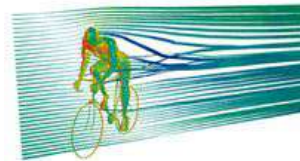
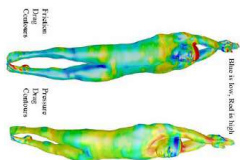
A noter que le préfacteur numérique (coefficient de traînée) de la force de traînée inertielle n'a pas encore pu être calculé analytiquement. Le sera-t-il un jour ?
 Il a par contre pu être mesuré expérimentalement depuis la fin du 19ème siècle, notamment par Eiffel par exemple dans ses expériences de chute depuis le haut de sa Tour en 1903-1906, ou dans des souffleries



Gustave Eiffel
 (1832-1923)
 ingénieur



Il a également été mesuré numériquement depuis la fin du 20ème siècle dans des simulations numériques d'écoulements sur ordinateurs.



Depuis sa construction en 1889, la tour de l'ingénieur français Gustave Eiffel sur le Champ-de-Mars a été très visitée. Pourtant, en ce jeudi 30 juillet 1903, ce ne sont pas des touristes qui arpentent la plate-forme mais monsieur Eiffel en personne. Il s'y livre à une expérience bien particulière en précipitant un objet très lourd depuis le deuxième étage le long d'un câble en acier. Sa vitesse augmente de plus en plus jusqu'à ce qu'un frein l'arrête à 20 m au-dessus du sol. Trois années durant, l'expérience va être répétée, et on en analyse méticuleusement les résultats. Dans quel but ? Avec les débuts de l'aviation, les problèmes de frottements de l'air commencent à préoccuper les ingénieurs. Eiffel s'engouffre dans la brèche de l'aérodynamisme avec passion. Et sa tour lui semble être le lieu idéal pour mener ses expériences.

En faisant chuter un objet, Eiffel s'intéresse à la phase transitoire de son mouvement, la phase d'accélération. Par la suite, la gravité est compensée par la résistance de l'air et l'objet se déplace à vitesse constante (voir *Un peu de physique*). Eiffel teste ainsi une quarantaine d'objets de surfaces et de volumes différents (sphères, cylindres, cônes) en changeant les angles d'attaque de l'air sur l'objet. Il atteint des vitesses de chute de près de 40 m/s, soit à peu près la vitesse des avions de l'époque. L'ingénieur montre la faible résistance à

Les expériences de Gustave Eiffel du 2ème étage de sa Tour (1903-1906)



l'air des cônes ; le « nez pointu » de certains avions, comme, plus tard, le *Concorde*, n'est pas le fait du hasard ! De même, Eiffel apporte la preuve, chiffres à l'appui, de la très grande résistance des demi-sphères concaves comme les parachutes (le fait était connu depuis les premiers sauts à la fin du XVIII^e siècle). Les données des coefficients de résistance à l'air sont extrêmement précises et les expériences d'Eiffel passent pour être un succès.

Description de l'expérience

Au deuxième étage de la tour, à plus de 110 m au-dessus du sol, Eiffel a pratiqué une ouverture carrée de 1,40 m. Deux tubes cylindriques glissent le long d'un câble. À l'intérieur d'un cylindre, se trouvent deux ressorts reliés à l'objet à tester.

Pour effectuer un essai, il faut attendre qu'il n'y ait plus de vent. On coupe les cordelettes qui retiennent l'appareil avec une serpe. Celui-ci tombe alors sur une hauteur d'environ 95 m et est ralenti puis stoppé à environ 20 m au-dessus du sol. La force de l'air qui s'exerce sur la surface à tester comprime les ressorts. Deux techniciens installés sur une plate-forme sont chargés de récupérer le dispositif. Ils l'accrochent alors à un treuil pour le remonter. Eiffel enchaîne quatre à cinq lancers par jour.

Lors de la chute, le mouvement des ressorts est gravé sur tambour enduit de noir de fumée. Les résultats renseignent sur l'accélération de l'appareil et donc sur la résistance de l'air.

Un peu de physique

Dans son livre de 1907 sur les *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air, exécutées à la tour Eiffel*, Eiffel rapporte : « Toutes nos expériences conduisent à des conclusions analogues et donnent des résultats sensiblement conformes à la formule de Newton : la résistance de l'air est égale à $R = KSV^2$, dans lequel K est constant pour une surface déterminée : c'est le coefficient de résistance de la surface. » S est la surface du modèle et V sa vitesse. Ainsi, la résistance de l'air augmente proportionnellement au carré de la vitesse. ● FIGURES 1. ET 2

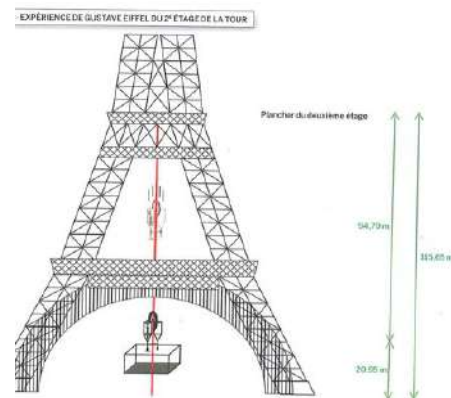
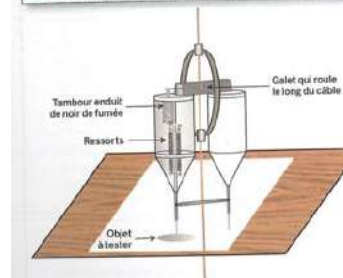


FIG. 1 - DISPOSITIF INSTALLÉ AU DEUXIÈME ÉTAGE DE LA TOUR EIFFEL



● Et après

Malgré la précision de ses mesures, Eiffel est conscient des limites de son dispositif. Premièrement, pour qu'ils puissent être étudiés convenablement, les objets ne doivent être ni trop légers, ni trop lourds. Deuxièmement, l'ingénieur a observé une différence de pression quand l'air s'écoule autour d'une plaque. Ce phénomène est de nos jours appelé portance et explique l'élévation des avions dans les airs. Or, pour étudier cette portance, il faut des essais qui puissent durer plus longtemps

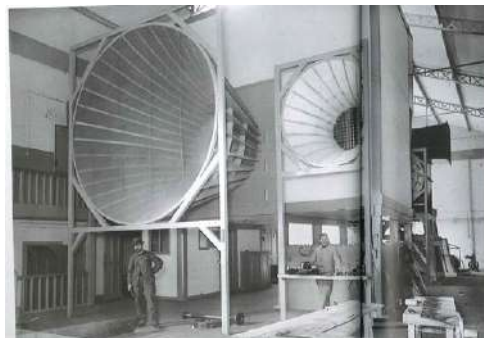
qu'une chute libre de quelques secondes. Eiffel songe alors à une soufflerie.

Cependant, celles qui existent à l'époque lui paraissent insuffisantes : elles débitent de l'air à 10 m/s quand il en voudrait 20. En 1907, Eiffel aménage donc sa propre soufflerie au pied de la tour. Avec l'aide de son collaborateur Léon Rith, il y réalise plus de quatre mille expériences jusqu'en 1911, pour la plupart sur des ailes d'avions. À partir de 1910, l'ingénieur engage des tests sur des avions complets pour en évaluer la stabilité. Édouard Nieuport, Henri Farman, les frères Charles et Gabriel Voisin ou encore Louis Blériot lui soumettent leurs modèles.

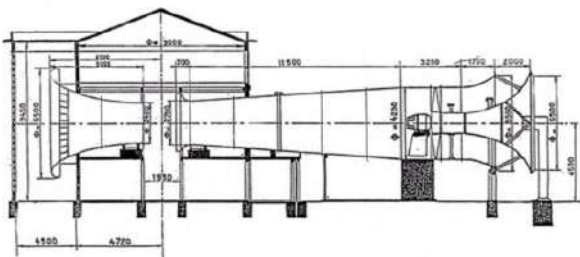
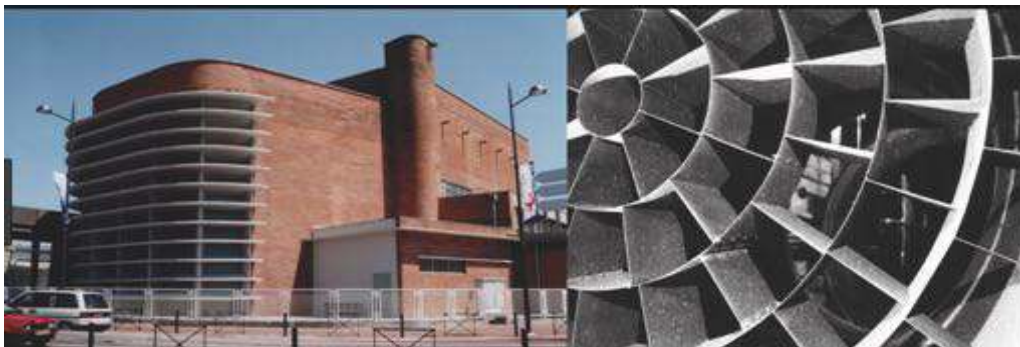
Les plaintes des riverains gênés par le bruit de la soufflerie obligent Eiffel à quitter son laboratoire du Champ-de-Mars. En 1912, il s'installe au 67, rue Boileau, dans le 16^e arrondissement. Sa soufflerie permet d'obtenir une vitesse régulière de 2 m/s à 32 m/s ; elle est alors la plus puissante au monde.



Soufflerie Eiffel à Paris



La soufflerie Eiffel
de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse
en activité depuis 1938



Veine circulaire : Ø 2,40 m x 2,00 m
Gamme de vitesse : 1 à 30 m/s
(110 km/h)

2.2 Les écoulements visqueux ($Re \ll 1$)

L'équation de Navier-Stokes écrite précédemment sous forme adimensionnée

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

se réduit pour des écoulements à petits nombres de Reynolds ($Re \ll 1$) alors approximativement à :

$$0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$

équation de Stokes

car la pression ne doit pas être ici adimensionnée par ρU^2 mais par $\eta U/L$

Propriétés de l'équation de Stokes (linéaire) et conséquences :

- unicité de solution
- réversibilité hydrodynamique
- symétrie de l'écoulement autour de corps symétriques
- modes de propulsion

Réversibilité cinématique à $Re \ll 1$

Si \mathbf{u} est solution, alors $-\mathbf{u}$ est aussi solution avec les CL adaptées



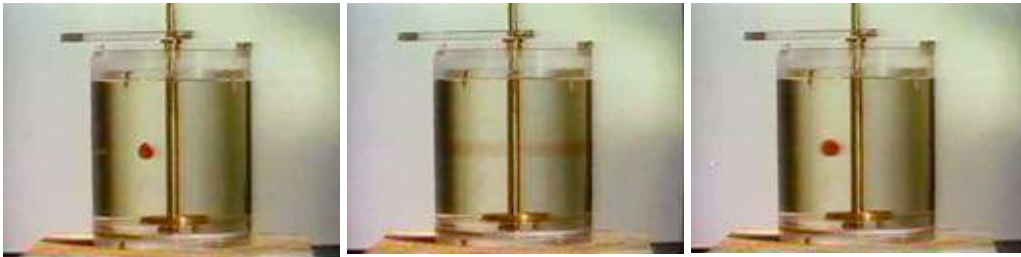
Réversibilité cinématique
 $Re \ll 1$



Irréversibilité cinématique
 $Re \gg 1$

Réversibilité cinématique ($Re \ll 1$)

Film
G. I. Taylor (1960)



état initial

après 4 tours dans un sens

et 4 tours en sens inverse

Mélange

$Re \gg 1$

$Re \ll 1$

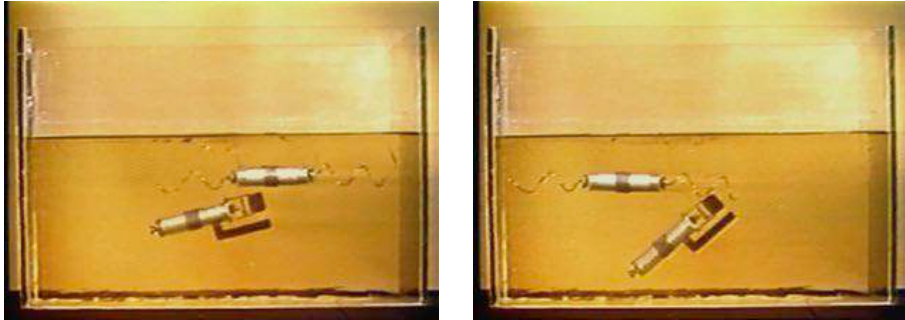


café, thé

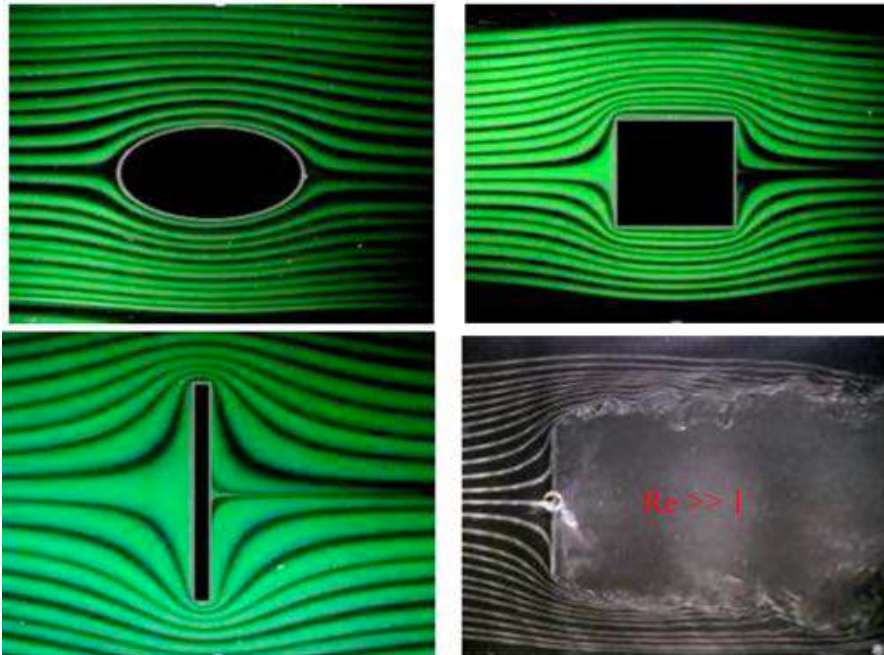


peinture

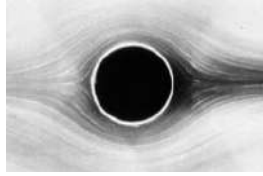
Locomotion à $Re \ll 1$
(Film G. I. Taylor, 1960)



Symétrie des écoulements $Re \ll 1$ autour de corps symétriques amont/aval



A $Re \ll 1$, la force de traînée (et aussi portance) sur un objet de taille L est $F \sim \eta LU$ en régime stationnaire



Le coefficient numérique en préfacteur peut être calculé analytiquement pour des formes simples :

$$F_D = 6\pi\eta RU \quad \text{pour une sphère (Stokes, 1880)}$$

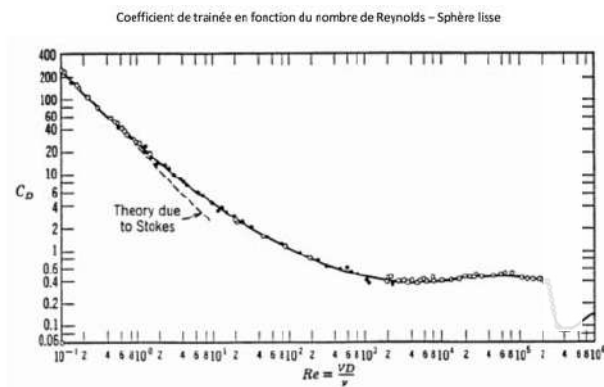
$$F_D = 16\pi\eta RU \quad \text{pour un disque (Sampson, 1891)}$$

Le coefficient de traînée défini en régime inertiel ($Re \gg 1$) n'est pas pertinent en régime visqueux ($Re \ll 1$)

Pour une sphère

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = \frac{3\pi\eta UD}{\frac{\pi}{8}\rho U^2 D^2} = \frac{24}{Re}$$

pour $Re \ll 1$



3. Autres nombres sans dimensions

3.1 Nombre de Strouhal

Pour des écoulements instationnaires caractérisés par un temps caractéristique propre, par exemple des écoulements oscillants à la fréquence f , ce temps caractéristique doit être utilisé dans l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$$

En adimensionnant par une vitesse U , une longueur L et le temps $1/f$ typiques de l'écoulement :

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{U} \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad \tilde{t} = tf \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$St \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{où} \quad St = \frac{fL}{U}$$

est le nombre de Strouhal



$St \ll 1$ ou $St \gg 1$?

Ici $St \sim 1$ car la fréquence est "naturelle" (issue d'une instabilité de l'écoulement, avec $St \approx 5$) et non imposée

3.2 Nombre de Froude

Pour des écoulements dans lesquels la gravité intervient, le terme de gravité peut être comparé aux autres termes par l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\text{Fr}} \tilde{\mathbf{g}} \quad \text{où} \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gL}$$

est le nombre de Froude

Le nombre de Froude compare les forces inertielles aux forces de gravités

Fr << 1 ou Fr >> 1 ?

Fr >> Re ou Fr << Re ?



3.3 Nombre de Weber et nombre capillaire

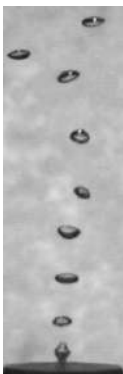
Pour les écoulements aux interfaces présentant des courbures importantes, le saut de pression à l'interface peut jouer un rôle important. Dans une écriture compacte de l'équation de Navier-Stokes où ce terme intervient de façon localisée ici par la fonction Dirac 2D δ_s perpendiculaire au vecteur unitaire \mathbf{n} et de courbure κ :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \gamma \kappa \delta_s \mathbf{n}$$

l'adimensionnant conduit alors à

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\text{We}} \tilde{\kappa} \delta_s \mathbf{n} \quad \text{où} \quad \text{We} = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$$

est le **nombre de Weber**



We >> 1 ou We << 1 ?

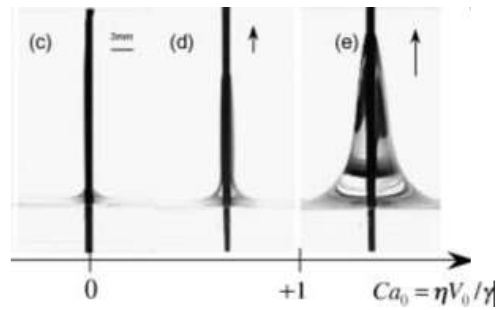
Le nombre de Weber compare les forces inertielles aux forces de tension de surface et est donc pertinent pour les grands nombres de Reynolds (Re >> 1)

Pour les écoulements à faibles nombres de Reynolds ($Re \ll 1$), le nombre de Weber n'est pas pertinent puisqu'il faut alors comparer les forces visqueuses aux forces de tension de surface par le **nombre capillaire Ca**

$$Ca = \frac{We}{Re} = \frac{\eta U}{\gamma}$$

$$0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \gamma \kappa \delta_s \mathbf{n} \quad \text{équation de Stokes}$$

$$0 = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{Ca} \tilde{\kappa} \delta_s \mathbf{n} \quad \text{équation de Stokes adimensionnée}$$



Enduction par tirage d'une plaque depuis un bain liquide : le film de Landau-Levich (1965)

Chapitre IX – Écoulements parallèles

Qu'est-ce qu'un écoulement parallèle ?

C'est un écoulement unidirectionnel invariant suivant la direction de l'écoulement.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x, y, z, t) \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$$

L'écoulement n'est alors pas 3C3D mais 1C2D ou même 1C1D

Cet écoulement satisfait à la conservation de la masse : $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

Les lignes d'écoulements sont parallèles



Pour un tel écoulement, les équations de Navier-Stokes se simplifient considérablement, car de nombreux termes sont nuls, notamment les termes inertiels

Si le champ de vitesse est de la forme $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x, y, z, t) \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{cases}$ les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{cases}$$

se simplifient considérablement :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{cases}$$

! Le fait qu'il existe une solution d'écoulement parallèle ne signifie pas qu'elle est la seule possible et donc observée dans la réalité...

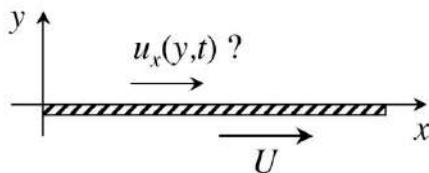
En pratique, la solution d'écoulement parallèle est observée jusqu'à un nombre de Reynolds critique Re_c au delà duquel une autre solution non-parallèle des équations de Navier-Stokes est observée, stationnaire ou instationnaire voire turbulente. La valeur Re est forcément supérieure à 1, parfois très supérieure.

Les écoulements parallèles présentés dans ce chapitre sont les briques de base de la mécanique des fluides : ce sont des écoulements simples, avec une solution analytique simple, à partir desquels de nombreux écoulements complexes peuvent être compris.

Nous allons donc étudier en détail les écoulements parallèles suivants :

- l'écoulement au démarrage d'une plaque
- le cisaillement entre deux parois en mouvement relatif
- l'écoulement en conduite (entre parois fixes)
- l'écoulement d'une couche à surface libre sur un plan incliné

1. Ecoulement de démarrage (d'une plaque)



- fluide en $y > 0$ au repos à $t < 0$

Hyp : - plaque plane en $y = 0$ immobile ($U = 0$) à $t < 0$
 puis mobile ($U = \text{cte} \neq 0$) à $t \geq 0$

- écoulement 2D (x, y)

Question : quel est l'écoulement à $t > 0$?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y, t) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque,
 pas par la gravité ni par un gradient de pression

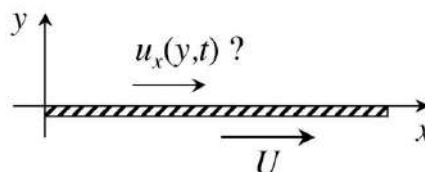
L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g_x$$

se réduit à

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1) \quad \text{où } \nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ est le coefficient de viscosité cinématique}$$

(en m²/s)



Avant de résoudre cette équation, on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes

$$\frac{U}{t} = \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{où } \delta \text{ est l'épaisseur caractéristique sur laquelle varie la vitesse, appelée } \mathbf{couche\ limite}$$

On en déduit que $\delta^2 = \nu t$

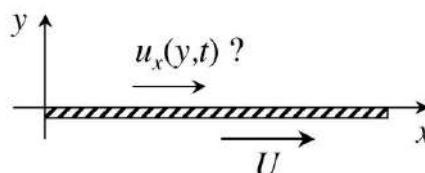
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

Dans ce problème instationnaire, on s'attend donc à ce que l'épaisseur de couche limite augmente en temps et soit plus importante pour un fluide de viscosité cinématique plus forte

	eau	air
ρ (kg/m ³)	1000	1.29
η (Pa.s)	10 ⁻³	1,85 10 ⁻⁵
ν (m ² /s)	10 ⁻⁶	1,4 10 ⁻⁵

Réolvons maintenant l'équation

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (1)$$



avec C.I. : $u_x(y, t=0) = 0$ pour tout $y > 0$
 C.L. : $u_x(y=0, t) = U$ pour tout $t > 0$
 $u_x(y=+\infty, t) = 0$ pour tout $t > 0$

Cette équation est identique à l'équation de diffusion de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

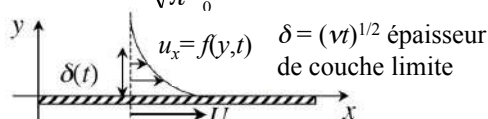
L'éq. (1) est invariante par transformation $y \rightarrow \alpha y, t \rightarrow \alpha^2 t$

On peut donc chercher une solution $u_x = f(\xi)$ avec $\xi = y/(\nu t)^{1/2}$

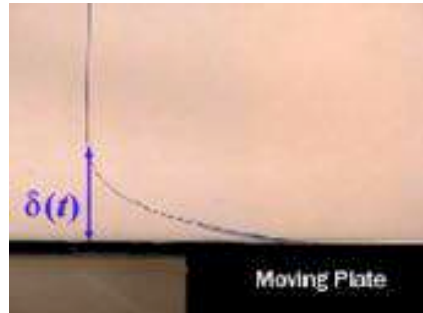
L'éq. (1) s'écrit alors

$$f''(\xi) + \frac{1}{2} \xi f'(\xi) = 0 \quad \text{avec CL : } f(0) = U, f(+\infty) = 0$$

La solution est $u_x(\xi) = U[1 - \text{erf}(\xi/2)]$ avec $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$



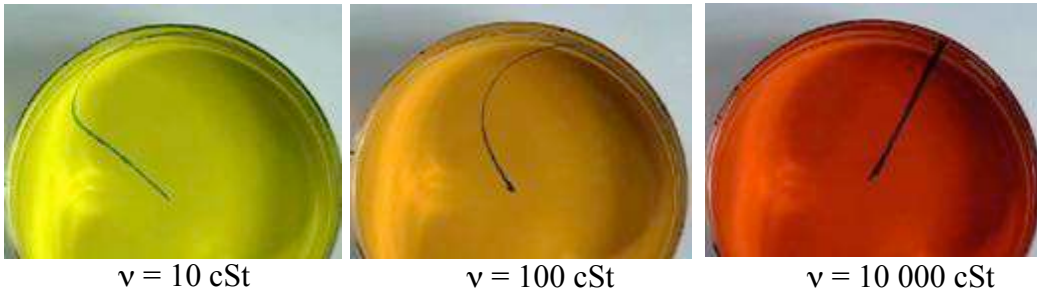
Démarrage d'une plaque plane



$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

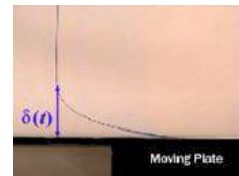
épaisseur de couche limite

Spin-up



Quelle est la contrainte tangentielle sur la plaque ?

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$



Avant de la calculer précisément, on peut rapidement estimer son ordre de grandeur :

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{\delta} \quad \text{avec } \delta = (\nu t)^{1/2} \text{ épaisseur de couche limite}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2} \quad \text{Cette contrainte décroît au cours du temps}$$

La contrainte tangentielle sur la plaque est précisément

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

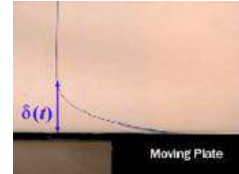
$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right)_{y=0} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u_x}{\partial \xi} = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

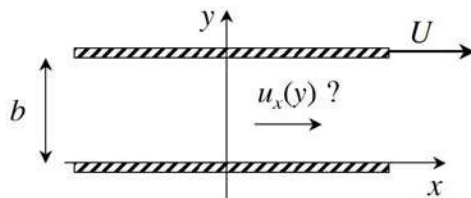
$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\eta \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \frac{2U}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho^{1/2} \eta^{1/2} U t^{-1/2}$$

Cette contrainte décroît au cours du temps



2. Écoulement de Couette (de cisaillement)



Hyp : - fluide entre 2 plaques // distantes de b , l'une fixe l'autre mobile à la vitesse U
 - écoulement stationnaire ($U = \text{cte}$)

Question : quel est le profil de vitesse ?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par le mouvement de la plaque, pas par la gravité ni par un gradient de pression

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g_x$$

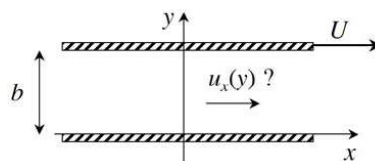
se réduit à $0 = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = A$$

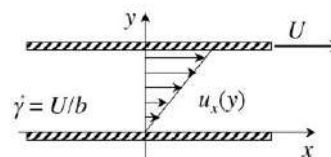
$$u_x = Ay + B \quad \text{avec 2 CL : } u_x(y=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u_x(y=b) = U \Rightarrow A = U/b$$

La solution est $u_x(y) = \frac{U}{b} y$ profil de vitesse linéaire
taux de cisaillement constant $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{U}{b}$



La viscosité n'intervient pas dans cet écoulement stationnaire caractérisé par un profil de vitesse établi

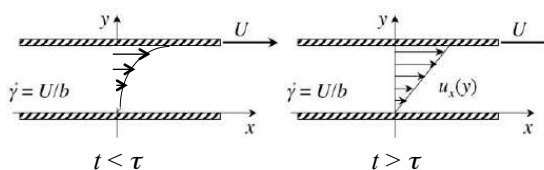


La viscosité intervient par contre dans le transitoire d'établissement du profil de vitesse. Le temps typique du régime transitoire avant le régime stationnaire correspond au temps τ de diffusion de la couche limite sur la distance b entre plaques à partir du temps $t = 0$ où la vitesse U est imposée à la plaque

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$$\delta = b \text{ quand } t = \tau :$$

$$\tau = \frac{b^2}{\nu}$$



Ce temps de transitoire est d'autant plus grand que b est grand et que ν est petit

La viscosité intervient également dans la contrainte (force) à appliquer sur la plaque pour la maintenir en déplacement à vitesse constante

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \frac{U}{b}$$

Cette contrainte est proportionnelle à la viscosité et au gradient de vitesse constant entre plaques.

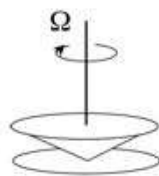
La plupart des viscosimètres sont basés sur cet écoulement de Couette.

Viscosimètres (ou rhéomètres) de Couette



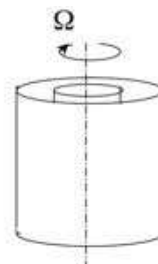
Couette plan

deux disques parallèles
l'un fixe, l'autre en rotation.
Très simple mais avec
l'inconvénient que le taux de
cisaillement dépend de r



Cône-plan

un cône en rotation au-dessus
d'un disque fixe.
L'avantage est que le taux de
cisaillement ne dépend pas de r .
Un autre avantage est la faible
quantité de liquide à utiliser



Couette cylindrique

deux cylindres
concentriques, le cylindre
intérieur tournant,
l'extérieur fixe



Maurice Couette
(1858-1943)
physicien français



*Le viscosimètre construit et
utilisé par Maurice Couette
pour mesurer la viscosité de
l'eau et de l'air en 1888*

Rhéomètres
à vitesse imposée
(mesure du couple)
à contrainte imposée
(mesure de vitesse)

Un rhéomètre actuel



Stabilité de l'écoulement de Couette plan ?

Linéairement stable jusqu'à $Re = +\infty$ (résultat issu d'une analyse de stabilité linéaire

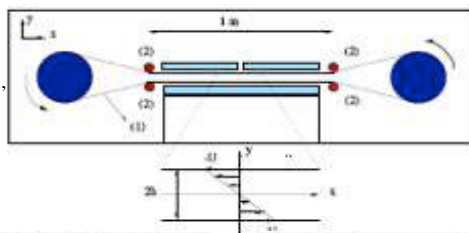
$$u = u_0 + A \cos(kx - \omega t) \quad \text{avec perturbation de vitesse } A \text{ infiniment petite}$$

Et non-linéairement (A non infiniment petit) ?

Transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle

Expériences

F. Daviaud, O. Dauchot, S. Bottin,
P. Manneville (CEA Saclay)
1990-2000
R. Monchaud et al. (ENSTA)
2010-2020



$Re \sim 325$

Transition vers la turbulence par spots turbulents
 Simulations numériques
 (Re = 250)

P. Manneville (Ladhyx) 2007
 Barkley & Tuckerman (LIMSI-PMMH) 2007
 Y. Duguet (LIMSI) 2015-2020

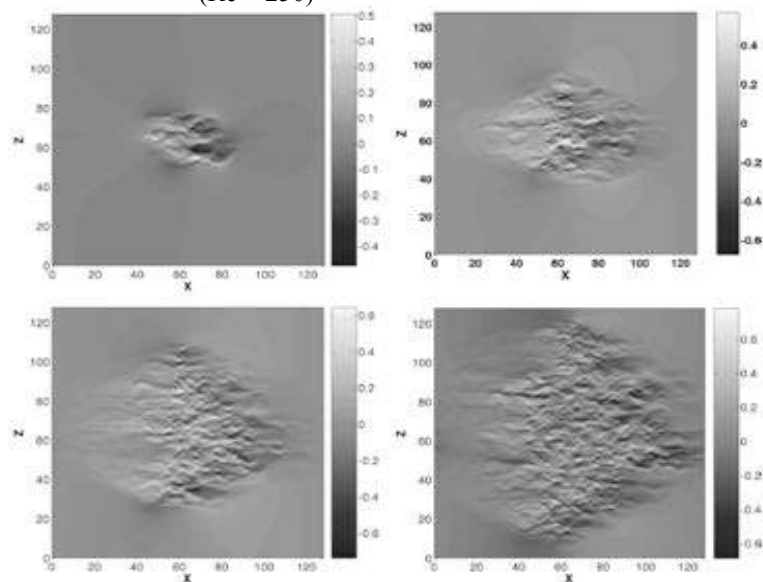


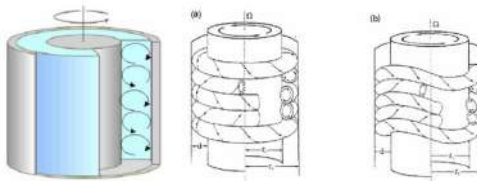
FIG. 1. Growth of a turbulent spot at $Re=250$ in a wide domain ($L_x, L_y=128 \times 128$). Plots of amplitude $U(x, y, z, t)$ in gray levels at $t=50, 150, 250$, and 350 (from left to right and top to bottom). The whole domain becomes uniformly turbulent at $t=700$.

Stabilité de l'écoulement parallèle $u_\theta(r)$ de Couette cylindrique ?

Linéairement stable jusqu'à $Re_c = \frac{41}{\sqrt{R_2/R_1 - 1}}$ pour $R_2/R_1 \approx 1$ (faible gap)

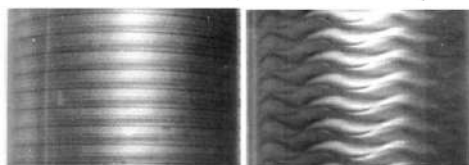
L'écoulement n'est ensuite plus parallèle mais se déstabilise pour prendre la forme de

rouleaux contrarotatifs stationnaires $\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, z) \\ u_\theta(r, z) \\ u_z(r, z) \end{cases}$
 (instabilité de Taylor-Couette)

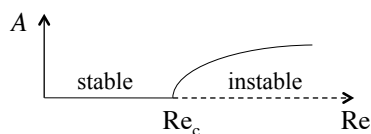


puis oscillants $\mathbf{u} \begin{cases} u_r(r, \theta, z, t) \\ u_\theta(r, \theta, z, t) \\ u_z(r, \theta, z, t) \end{cases}$

...
 avant la turbulence (H. Sweeney & J. Gollub 1975)



rouleaux de Taylor-Couette

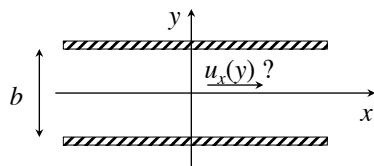


Instabilité de Taylor-Couette
 par bifurcation super-critique
 (1923)



G. I. Taylor
 1886-1975

3. Écoulement de Poiseuille (dans une conduite)



Hyp : - fluide entre 2 plaques fixes // distantes de b
 - écoulement stationnaire induit par gradient de pression
 (différence de pression Δp appliquée entre l'entrée et la sortie distantes de L)

Question : quel est le profil de vitesse ?

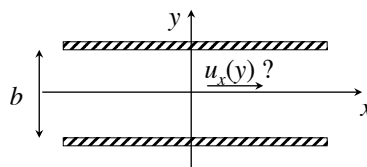
Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est induit par un gradient de pression
 pas par un mouvement paroi ni par la gravité

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g_x$$



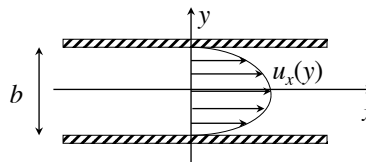
se réduit à $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ A noter que $\partial p / \partial x$ est forcément constant car u_x ne dépend pas de x ($\partial p / \partial x = \Delta p / L$)

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y + A$$

$$u_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B \quad \text{avec 2 CL : } \begin{cases} u_x(y = b/2) = 0 \\ u_x(y = -b/2) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{d'où } A = 0 \\ \text{et } B = \dots \end{matrix}$$

ce qui donne

$$u_x(y) = U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 \right] \quad \text{avec } U_0 = -\frac{b^2}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

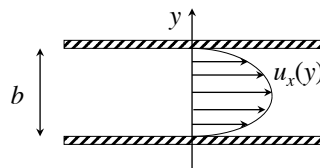


Le profil de vitesse est parabolique ("profil de Poiseuille")
 avec une vitesse maximale U_0 au centre

La vitesse est dans le sens opposé du gradient de pression ($u_x > 0$ si $\partial p / \partial x < 0$)

Le débit (par unité de largeur transverse) est

$$q = \int_{-b/2}^{+b/2} u_x(y) dy = -\frac{b^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$



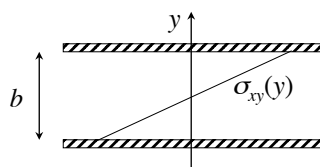
On constate que le débit est proportionnel au gradient de pression, inversement proportionnelle à la viscosité et qu'il varie très fortement avec la distance entre plaques

La vitesse moyenne "débitante" est

$$\bar{U} = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3} U_0$$

Le profil de contrainte est

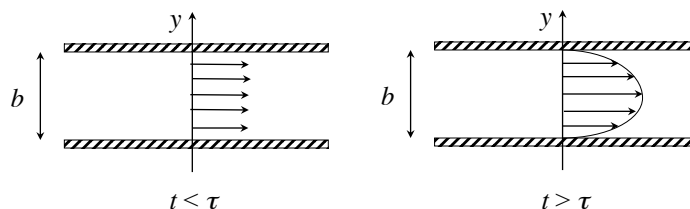
$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} y$$



La contrainte est nulle au centre et maximale aux parois

La contrainte apparaît comme ne pas dépendre de la viscosité, mais elle en dépend en fait via le gradient de pression

Quel est le temps de transitoire avant l'établissement du profil parabolique de Poiseuille ?



Le temps typique du régime transitoire avant le régime stationnaire correspond au temps τ de diffusion de la couche limite sur la distance b entre plaques à partir du temps $t = 0$ où le gradient de pression est imposé

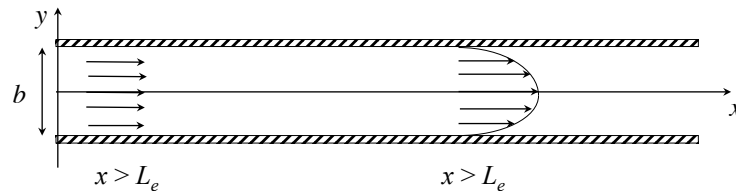
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$\delta = b/2$ quand $t = \tau$:

$$\tau = \frac{b^2}{4\nu}$$

Ce temps de transitoire est d'autant plus grand que b est grand et que ν est petit

Quelle est la longueur d'établissement L_e du profil parabolique de Poiseuille ?



Cette longueur d'établissement est également gouvernée par la compétition entre la diffusion des couches limites et l'advection par l'écoulement

$$\delta = (\nu t)^{1/2} \quad x = Ut$$

$$x = L_e \text{ quand } \delta = b/2$$

$$L_e = \frac{b^2}{4\nu} U = \frac{\text{Re}}{4} b$$

Cette longueur d'établissement est proportionnelle à l'espace entre plaques et au nombre de Reynolds

L'écoulement entre plaques stationnaire avec un profil de vitesse établi parabolique est caractérisé par une vitesse moyenne

$$\bar{u}_x = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Plus généralement, la vitesse moyenne de l'écoulement 2C2D parallèles aux plaques est

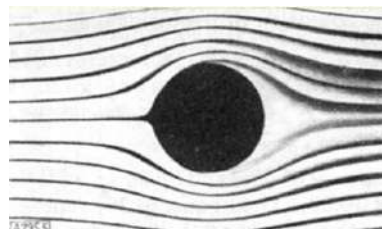
$$\bar{\mathbf{u}}_x = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\eta} \bar{\nabla} p$$

Cette vitesse moyenne apparaît ainsi proportionnelle au gradient de pression, et la pression apparaît donc ici comme une fonction "potentielle" de la vitesse pour cet écoulement entre plaques. Les lignes de courant correspondant à cette vitesse moyenne correspondront ainsi paradoxalement à celui d'un écoulement de type fluide parfait !

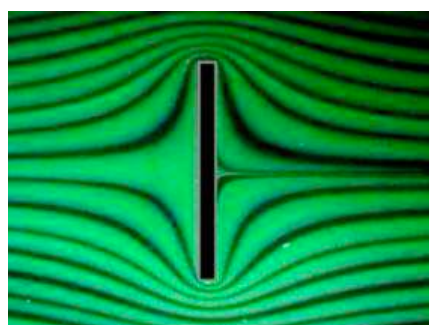
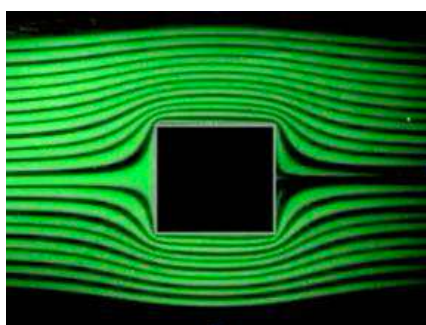
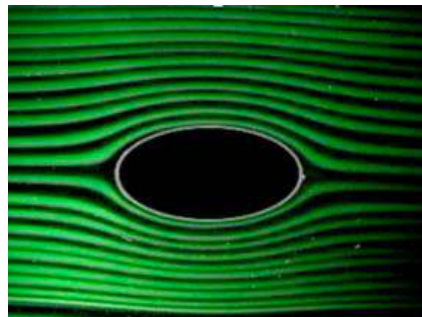
Les visualisations d'écoulements en cellule de Hele-Shaw, constituée de deux plaques de verre parallèles, permettent ainsi de visualiser les lignes d'écoulement de fluide parfait !

Les couches limites autour d'un obstacle inséré dans une cellule de Hele-Shaw sont d'une épaisseur $\delta = b$. Elles sont donc très minces si l'espace b est très faible.

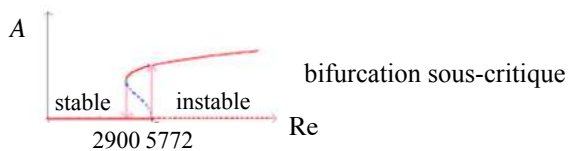
Visualisations d'écoulements autour d'obstacles en cellule de Hele-Shaw

H. S. Hele-Shaw
(1854-1941)

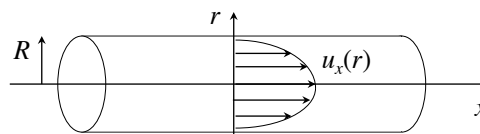
1898



L'écoulement de Poiseuille plan est-il stable ?

Il est linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re_c = 5772$, expérimentalement jusqu'à $Re_c \approx 3000$ (sans précautions particulières) voire 5500 (avec de grandes précautions)Il est non linéairement instable à partir $Re_c \approx 2900$ 

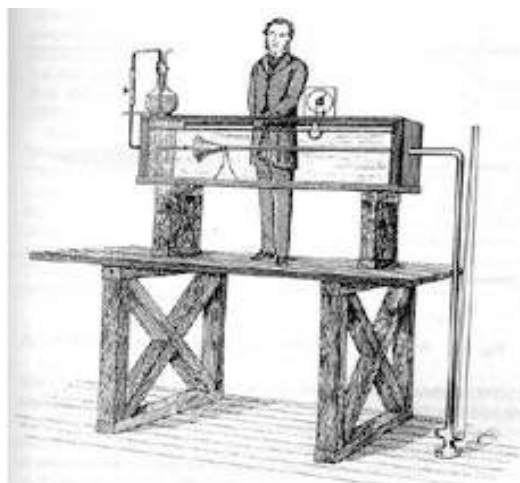
Écoulement en tube cylindrique



L'écoulement de Poiseuille cylindrique est-il stable ?

linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re = +\infty$, expérimentalement jusqu'à $Re \approx 2600$ (sans précautions particulières) ou même 10^5 (avec des très grandes précautions) !non linéairement instable à $Re \approx 2600$ (cas tube)

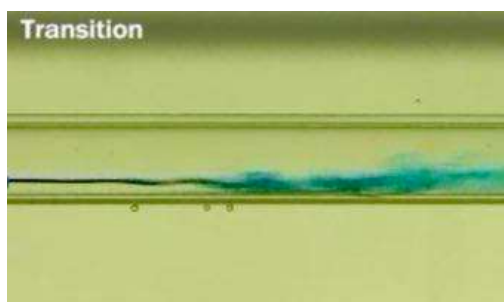
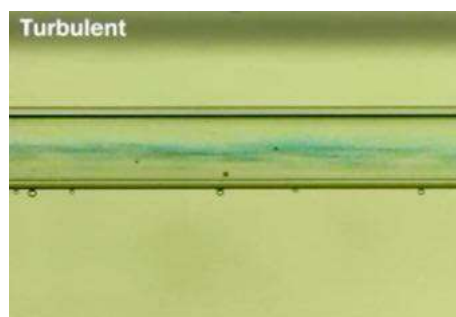
Ecoulement en tube
Transition laminaire-turbulent



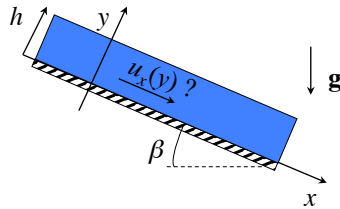
Osborne Reynolds (1883, Manchester)



Transition laminaire-turbulent en tube



4. Ecoulement sur plan incliné



Hyp : - couche liquide de hauteur h sur un plan incliné d'un angle β
 - écoulement stationnaire

Question : quel est le profil de vitesse ?

Compte-tenu de la géométrie, cherchons une solution possible d'écoulement parallèle instationnaire de la forme

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_x(y,t) \\ u_y = 0 \end{cases}$$

L'écoulement est ici induit par la gravité.

L'équation de Navier-Stokes suivant x

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g_x$$

se réduit à $0 = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g \sin \beta$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{-g \sin \beta}{\nu}$$

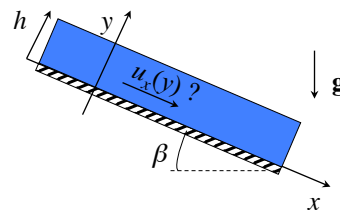
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{-g \sin \beta}{\nu} y + A$$

$$u_x = \frac{-g \sin \beta}{2\nu} y^2 + Ay + B$$

ce qui donne

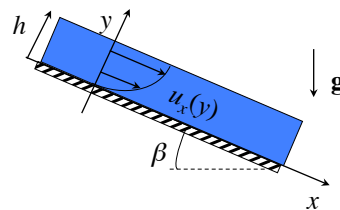
$$u_x(y) = \frac{\rho g \sin \beta}{2\eta} y(2h - y)$$

Le profil de vitesse est (semi) parabolique avec vitesse maximale à la surface



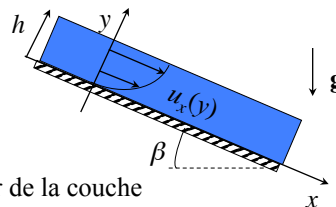
et

avec 2 CL : $u_x(y=0) = 0$ $\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=h} = 0$



Le débit volumique (par unité de largeur transverse) est

$$q = \int_0^h u_x(y) dy = \frac{\rho g \sin \beta h^3}{3\eta}$$



Le débit volumique dépend très fortement de l'épaisseur de la couche

La vitesse moyenne "débitante" est

$$\bar{U} = \frac{q}{h} = \frac{g \sin \beta h^2}{3\nu}$$

A.N. pour un film mince d'eau d'1 mm sur une pente de 10°

$$\bar{U} \approx \frac{10 \times 0,1 \times (10^{-3})^2}{3 \times 10^{-6}} \approx 0,3 \text{ m/s} \quad \text{Re} \approx \frac{0,3 \times 10^{-3}}{10^{-6}} \approx 300$$

pour une rivière de hauteur 1 m

$$\bar{U} \approx \frac{10 \times 10^{-3} \times 1^2}{3 \times 10^{-6}} \approx 3 \times 10^3 \text{ m/s} ! \quad \text{Re} \approx \frac{3 \times 10^3 \times 1}{10^{-6}} \approx 3 \times 10^9 !$$

Une rivière est (heureusement) turbulente...

Cet écoulement parallèle est-il stable ?

Il est linéairement stable jusqu'à $\text{Re}_c = \frac{5}{4 \tan \beta}$

Sur une paroi verticale, il n'est donc jamais stable

Instabilités de films tombants

Nusselt (1916)
Kapitsa & Kapitsa (1949)



ruissellement dans la rue de la Colline (Orsay)
un jour de pluie



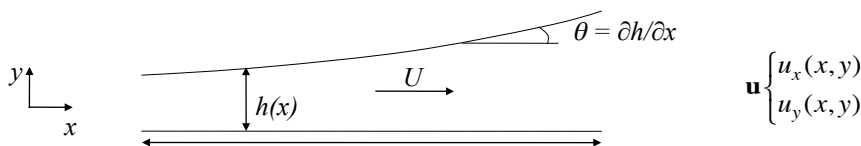
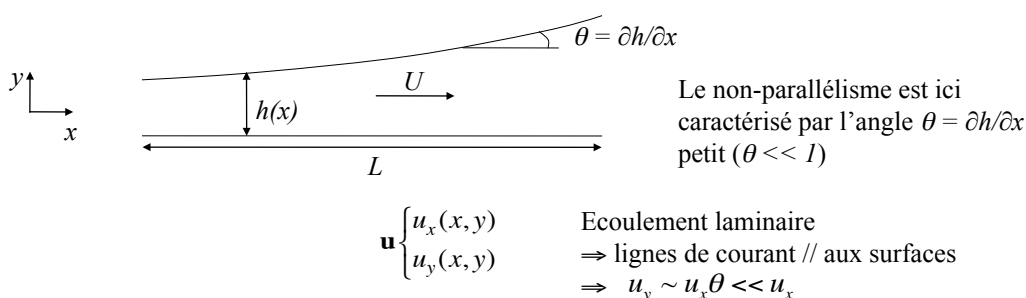
ruissellement sur une fibre
(expérience/théorie FAST, Orsay)
(F. Giorgiutti/C. Ruyer-Quil)
(2005-2008)

Chapitre X – Ecoulements quasi parallèles (faiblement non parallèles)

1. Ecoulements de couches minces en approximation de lubrification

1.1 Les approximations de lubrification

Hypothèses : écoulement 2C2D stationnaire
film mince ($h \ll L$) lentement variable ($\partial h / \partial x \ll 1$)



Les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour un écoulement 2C2D stationnaire

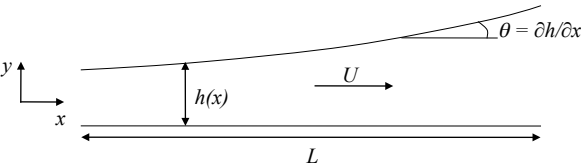
$$\begin{cases} \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Regardons l'importance relative des différents termes dans la configuration particulière de couche mince lentement variable.

La vitesse principale est suivant x : $u_x \sim U$

La vitesse suivant y est beaucoup plus faible : $u_y \approx \theta u_x \sim \theta U$ ($u_y \ll u_x$)

Et les gradients de vitesses ? $\frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{U}{h}$ $\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim ?$

$$\begin{cases} \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$


importance relative des différents termes :

vitesse : $u_x \sim U$ $u_y \sim U\theta$
 et $\frac{\partial u_x}{\partial x}$? par l'équation de continuité $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U\theta}{h}$

L'équation de NS suivant x :

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2\theta}{h} \quad \frac{U^2\theta}{h} \quad \frac{U\theta^2}{h^2} \quad \frac{U}{h^2}$$

Un terme visqueux est prépondérant : $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$

Les termes inertiels sont du même ordre de grandeur mais sont négligeables devant termes visqueux si :

$$\rho \frac{U^2\theta}{h} \ll \eta \frac{U}{h^2} \Rightarrow \text{Re} = \frac{\rho U h}{\eta} \ll \frac{1}{\theta} \quad \text{avec } 1/\theta \gg 1$$

équation NS suivant y : $\rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)$

comme $u_y \ll u_x$ alors $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$

d'où $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

La pression peut être considérée comme constante dans l'épaisseur du film : $p(x,y)$

Finalement, les équations de Navier-Stokes se réduisent pour un film mince lentement variable dans les approximations de lubrification à :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad \text{tant que } \text{Re} = \frac{\rho U h}{\eta} \ll \frac{1}{\theta} \quad \text{avec } 1/\theta \gg 1$$

Si l'écoulement est instationnaire avec un temps caractéristique propre T ou $1/f$, peut-on quand même négliger le terme instationnaire ? A quelle condition ?

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} \ll \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} \ll \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{U}{T} \ll \nu \frac{U}{h^2}$$

où T est le temps caractéristique d'instationnarité
(fréquence caractéristique $f = 1/T$)

$$T \gg \frac{h^2}{\nu}$$

où $\tau = \frac{h^2}{\nu}$ est le temps de diffusion visqueuse sur h

Si $T \ll \tau$, l'écoulement est quasi-stationnaire :

le profil de vitesse est établi à chaque instant

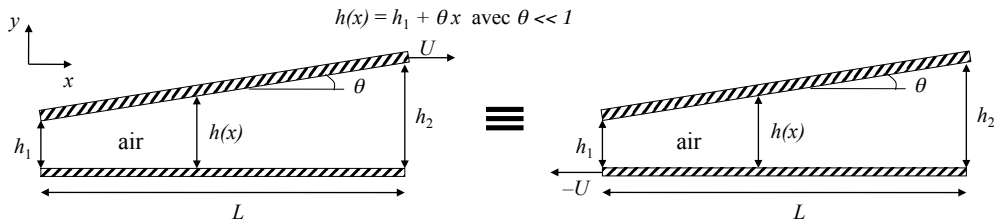
Si $T \gg \tau$, le terme instationnaire ne peut être négligé :

le profil de vitesse n'est pas établi à chaque instant

Lubrification

Exemple : Feuille de papier glissant sur une table (by G. I. Taylor)

1.2 Exemple de la feuille de papier glissant sur une table



- film ($h \ll L$) faiblement non parallèle ($\theta \ll 1$)
- Hyp : - air supposé incompressible
- pression $p = p_{at}$ en dehors du film

Question : Quelle est la force de portance ?

Pour l'estimer, il faut calculer $p(x)$ et donc $u(x)$

L'équation de NS se réduit dans l'approximation de lubrification à :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} & (1) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} & (2) \end{cases} \quad \text{tant que} \quad Re \ll \frac{1}{\theta}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} & (1) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} & (2) \end{cases} \quad (Re \ll 1/\theta)$$

(2) $\Rightarrow p$ ne dépend que de x

(1) $\Rightarrow u_x(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + Ay + B$ avec 2 CL : $\begin{cases} u_x(0) = -U \\ u_x(h) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_x(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y(h-y) - \frac{U}{h}(h-y)$ écoulement de Couette-Poiseuille
 Poiseuille Couette

\Rightarrow débit $q = \int_0^h u_x(y) dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Uh}{2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta}{h^3} \left(q + \frac{Uh}{2} \right)$

Intégration de p plus facile en h qu'en x : $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x}$ avec $\frac{\partial h}{\partial x} = \theta$

$\frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{12\eta}{\theta h^3} \left(q + \frac{Uh}{2} \right) \Rightarrow p = -\frac{12\eta q}{\theta h^2} + \frac{6\eta Uh}{\theta h} + C$ avec 2 CL : $\begin{cases} p(h_1) = p_{at} \\ p(h_2) = p_{at} \end{cases}$

(car 2 inconnues : C et q)

$$\begin{cases} p_{at} = -\frac{12\eta q}{\theta h_1^2} + \frac{6\eta U h_1}{\theta h_1} + C \\ p_{at} = -\frac{12\eta q}{\theta h_2^2} + \frac{6\eta U h_2}{\theta h_2} + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = p_{at} + \frac{6\eta U}{\theta} \frac{(h_2 - h)(h - h_1)}{h^2(h_1 + h_2)} \\ q = -\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} U \end{cases}$$

Force normale ?

$$F_N = \int_0^L (p - p_{at}) dx = \frac{1}{\theta} \int_{h_1}^{h_2} (p - p_{at}) dh = \frac{6\eta U}{\theta^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{(h_2 - h)(h - h_1)}{h^2(h_1 + h_2)} dh$$

[...]

$$F_N = \frac{6\eta U}{\theta^2} \left[\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{2(h_2 - h_1)}{h_1 + h_2} \right]$$

$$F_N \propto \frac{\eta U}{\theta^2}$$

Force tangentielle ?

$$F_T = \int_0^L \eta \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} dx =$$

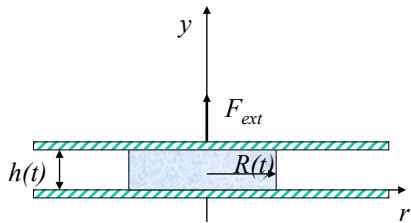
[...]

$$F_T = \frac{2\eta U}{\theta} \left[2 \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - \frac{3(h_2 - h_1)}{h_1 + h_2} \right]$$

$$F_T \propto \frac{\eta U}{\theta}$$

$$\frac{F_N}{F_T} \propto \frac{1}{\theta} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad F_N \gg F_T$$

1.3 Exemple de l'“adhésion hydrodynamique”



Situation initiale ($t < 0$) : une goutte de volume $V_0 = \pi R^2 h_i$ entre 2 plaques parallèles distantes de h_i

A $t \geq 0$, on tire sur les plaques avec la force F_{ext}

Question : dynamique du mouvement ?

Hyp : écoulement axisymétrique $\mathbf{u} = u_r(r,y) \mathbf{e}_r$

Equation de NS dans l'approximation de lubrification
(le non-parallélisme de l'écoulement est ici induit par son caractère radial)

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2} & (4) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} & (5) \end{cases}$$

(4) \Rightarrow la pression est constante dans l'épaisseur de la couche (hors hydrostatique) :
 p ne dépend que de r

$$(5) \Rightarrow u_r(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} y^2 + Ay + B \quad \text{avec 2 CL : } \begin{cases} u_r(0) = 0 \\ u_r(h) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_r(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial r} y(h-y) \quad u_r < 0 \text{ car } dp/dr > 0 \text{ (} p \text{ minimum au centre)}$$

$$\Rightarrow \text{débit } Q = \int_0^h u_r(y) 2\pi r dr = -\frac{2\pi r h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial r}$$

Conservation de la masse entre deux couronnes de fluide situées en r et $r + dr$:

$$[Q(r) - Q(r + dr)] dt = dh 2\pi r dr$$

$$-\frac{dQ}{dr} = 2\pi r \frac{dh}{dt} \quad (Q < 0 \text{ pour } dh/dt > 0)$$

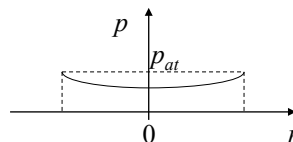
En injectant l'expression du débit Q dans l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12\eta \frac{dh}{dt} \quad (\text{équation de Reynolds en cylindrique})$$

$$p(r) = \frac{3\eta}{h^3} \frac{dh}{dt} r^2 + A \ln r + B \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \text{non divergence de } p \text{ en } r=0 \text{ (}\Rightarrow A=0\text{)} \\ \text{+ CL } p(R) = p_{at} \end{array}$$

$$p(r) = p_{at} - \frac{3\eta}{h^3} \frac{dh}{dt} (R^2 - r^2)$$

profil radial de pression parabolique



La force résultantes des forces de pression sur la plaque mobile est:

$$F_p = \int_0^R (p(r) - p_{at}) 2\pi r dr = -\frac{3\pi\eta R^4}{2h^3} \frac{dh}{dt} \quad (F < 0 \text{ pour } dh/dt > 0)$$

Mouvement de la plaque sous une force extérieure F_{ext} :

$$\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_p = 0$$

$$F_{ext} - \frac{3\pi\eta R^4}{2h^3} \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\text{avec} \quad R(t)^2 = \frac{V_0}{\pi h(t)}$$

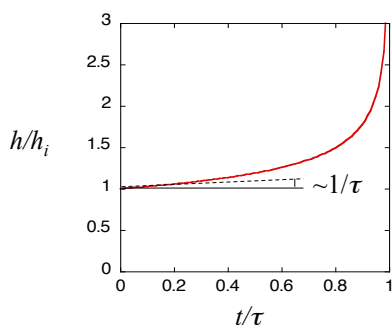
où V_0 est le volume de la goutte

$$F_{ext} - \frac{3\eta V_0^2}{2\pi h^5} \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{h^5} = \frac{2\pi F_{ext}}{3\eta V_0^2} dt \quad \text{avec } h = h_i \text{ quand } t = 0$$

$$\frac{h}{h_i} = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-1/4} \quad \text{avec}$$

$$\tau = \frac{3\eta V_0^2}{8\pi F_{ext} h_i^4}$$

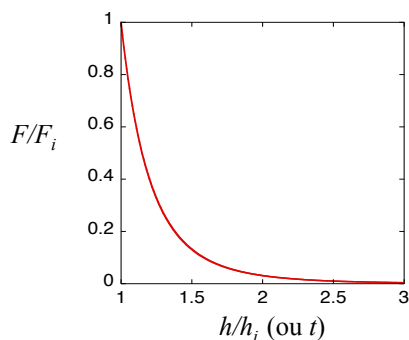
τ d'autant plus grand que h_i petit



$$\text{AN : } V_0 = 1 \text{ mm}^3, h_i = 0,1 \text{ mm}, \eta = 10^{-3} \text{ Pa.s (eau)}, F_{ext} = 10 \text{ grammes-force} \\ \Rightarrow \tau = 10^7 \text{ s}$$

A vitesse imposée $V = dh/dt = \text{cte}$, la force extérieure à appliquée est telle que :

$$F_{ext} - \frac{3\eta V_0^2}{2\pi h^5} \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{ext} = \frac{3\eta V_0^2}{2\pi h^5} U}$$



$$\frac{F}{F_i} = \left(\frac{h}{h_i}\right)^{-5}$$

avec $F_i = \frac{3\eta V_0^2}{2\pi h_i^5} U$

Retour sur les approximations de lubrification

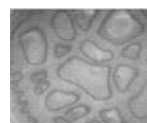
- vitesse verticale négligeable ($u_r \ll u_y$) ? OK si $r > h$
- termes visqueux $\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r}$ et $\frac{v_r}{r^2}$ négligeables ? OK si $r > h$
- terme inertiel $v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$ négligeable ? OK si $\text{Re}_h < \frac{r}{h}$
- terme instationnaire $\frac{\partial v_r}{\partial t}$ négligeable (hypothèse quasi-statique) ?
OK si $N = \frac{h^2}{\nu \tau} \sim \frac{8\pi \rho F_{ext} h_i^6}{3\eta^2 V_0^2} \ll 1$

Mécanismes de perturbation de l'écoulement de base :

- instabilité de Saffman-Taylor en périphérie



- cavitation au centre (zone de basse pression)



Expériences de traction à vitesse imposée sur de l'huile silicone

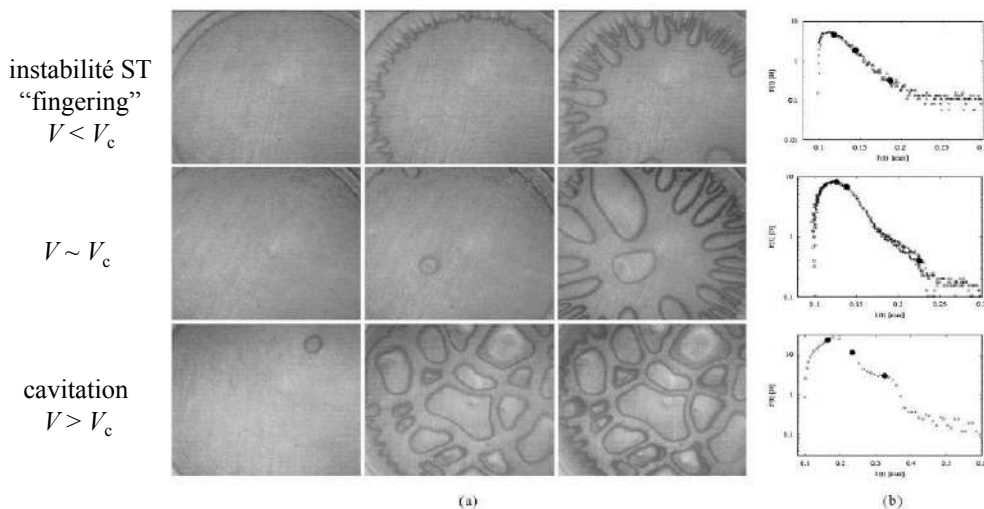


Fig. 3. In (a), instantaneous pictures of the liquid volume, taken with the fast-camera instrument, during the traction experiment at $V = 10 \mu\text{m/s} < V_c$ (first row: images taken from left to right at 2960 ms, 4800 ms and 8640 ms after start), $V = 50 \mu\text{m/s} \approx V_c$ (second row: images taken at 1120 ms, 1260 ms and 2540 ms after start) and $V = 2000 \mu\text{m/s} \gg V_c$ (third row: images taken at 68 ms, 88 ms and 124 ms after start). The sample is here the 48 cM silicon oil, and initial confinement is $h_0 = 100 \mu\text{m}$. The corresponding force (N)-separation (mm) curves are displayed in (b), with filled circles indicating when the images were recorded.

S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, J. Teisseire & P. Fabre, *Eur. Phys. J. E* **15**, 97-116 (2004)

Motifs après séparation des plaques

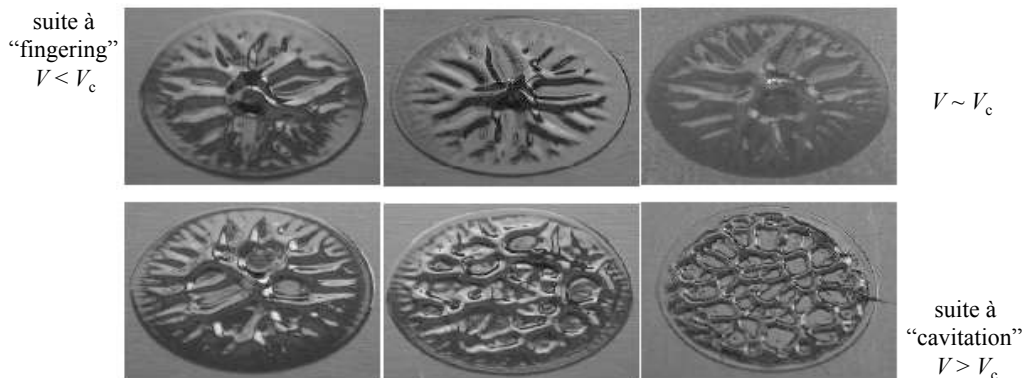


FIG. 3: Patterns left on the bottom plate immediately after full separation was achieved (increasing velocities from left to right and from top to bottom; top right is $V = V_c$). Note the arborescent pattern [10] at low velocities and the cellular pattern for $V > V_c$.

S. Poivet, F. Nallet, C. Gay & P. Fabre, *Europhys. Lett.* **62**, 244-250 (2003)

Apparition de fractures à très grande vitesse de traction de fluides viscoélastiques

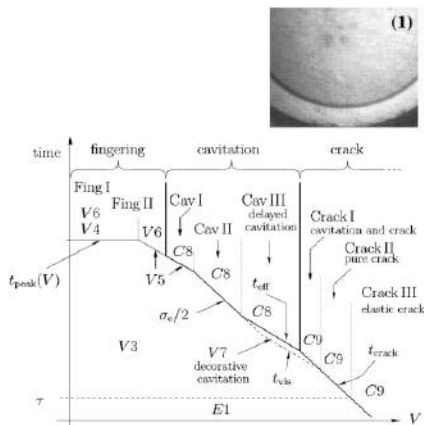


FIGURE 29 Expected force peak time as a function of the traction velocity. Stage V3 (imperceptible viscous sample flow with regularly increasing tensile force driven by compliant machine) ends up with one of the following mechanisms: (i) fingering (either after gentle flow (V4 and V6) or after a sudden viscous flow V5); (ii) cavitation (C8), either after sudden viscous flow (V5) or at time T_{cav} , while the tensile force is increasing regularly (V3), or after slow bubble growth stage V7 (between the dotted line that represents time T_{growth} and the solid line that represents $2T_{growth}$); or (iii) cracking (stage C9 beginning at time T_{crack}). Stage V7 (slow bubble growth) can either continue up to the full bubble development (delayed cavitation) or be interrupted by crack propagation (the sample then displays both cavitation and cracking, with cracking taking over eventually).

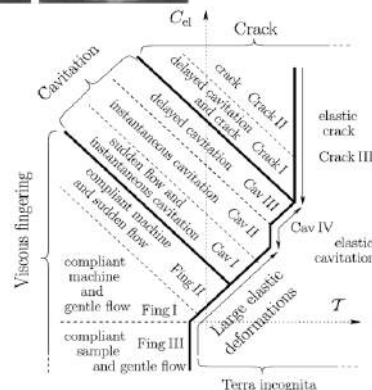
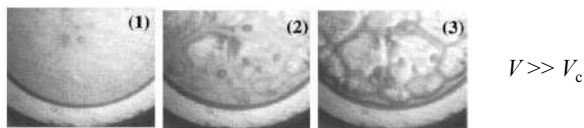


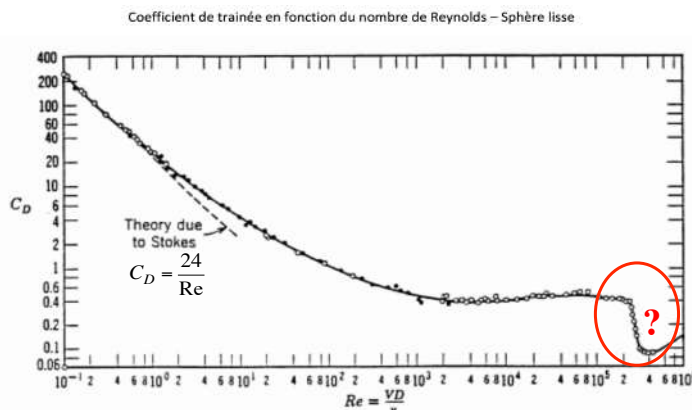
FIGURE 30 Phase diagram of the system behaviour in terms of nondimensional parameters C_d and T (log-log plot). All three failure mechanisms (fingering, cavitation, and cracking) are included. The equations corresponding to all lines in the diagram are to be found in Table 5. Varying the traction velocity as on Fig. 29 amounts to visiting a horizontal line on the present diagram (because $T \propto V$).

J. Teisseire, F. Nallet & C. Gay, *J. Adhesion* **83**, 613-677 (2008)

2. Ecoulements de couches limites

2.1. Introduction historique

Le concept de couche limite date d'une certaine d'années (début du 20ème siècle) et a constitué un élément clé dans le développement de l'aéronautique, avec la compréhension de phénomènes subtils, qui apparaissaient incompréhensibles à l'époque, comme la crise de traînée appelée "the Eiffel paradox"



Que se passe-t-il entre $Re = 2 \times 10^5$ et 3×10^5 ?

Le 13 août 1912, courrier de Gustave Eiffel à un de ses collaborateurs :

« Mon cher Rith, j'ai reçu votre lettre du 12. Les résultats pour la sphère de 24,4 cm avec les vitesses de 6 à 10 m/s sont plus que bizarres et des expériences aussi discordantes ne peuvent être bonnes. Elles ont besoin d'être refaites. Achetez une nouvelle sphère de 15 à 18 cm. »

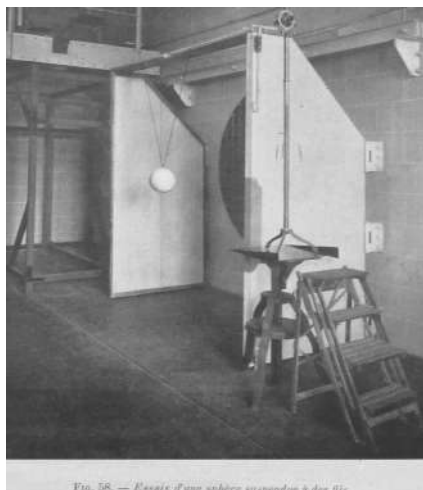


Fig. 56. — Essai d'une sphère suspendue à des fils.

Dispositif de mesure de la traînée de la sphère par son recul dans la soufflerie d'Eiffel

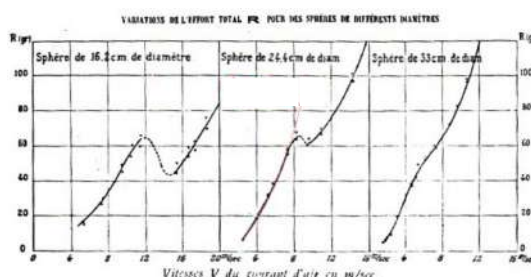


Fig. 57. — Résistance totale R des sphères en fonction de la vitesse.

Note du 30 décembre 1912 présentée par Gustave Eiffel à l'Académie des Sciences :

« Le principal laboratoire aérodynamique allemand, celui de Göttingen, a attribué à ce coefficient une valeur deux fois et demie plus forte. Il a, du reste, publié que celui que j'avais donné moi-même était une erreur manifeste de ma part et ne pouvait qu'être le résultat d'une faute de calcul. »

« Nous ferons remarquer que le capitaine Costanzi, de la Brigada Specialisti, à Rome, a constaté la même diminution brusque de $K [C_x]$ avec des sphères immergées dans l'eau »

Eiffel en 1914 : « Lord Rayleigh, l'éminent directeur du National Physical Laboratory, a adressé une note à l'Académie des Sciences le 13 janvier 1913 dans laquelle il a fait remarquer que les produits U_c de la vitesse critique par le diamètre de la sphère sont à peu près constants. »

Cette remarque de Rayleigh est sans doute la première application du concept de nombre de Reynolds...

La crise de traînée est souvent dénommée « *Eiffel paradox* » dans les pays anglophones.



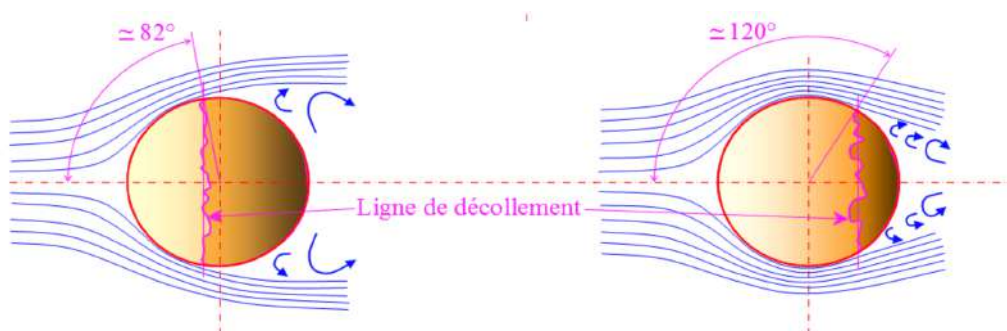
John William Strutt
Lord Rayleigh
(1842-1919)
physicien anglais
prix Nobel de physique 1904

La crise de traînée

Cette brusque diminution du coefficient de traînée et donc de la force de traînée, appelée “crise de traînée” est due à un changement du champ de vitesse autour de la sphère. La *couche limite* (*boundary layer* en anglais), très mince zone proche de la sphère de transition entre la vitesse sur la sphère et la vitesse loin de la sphère, se modifie pour passer d’un régime laminaire à un régime turbulent et décolle plus en aval : le sillage en aval de la sphère est alors plus étroit, ce qui entraîne une réduction de force de traînée.

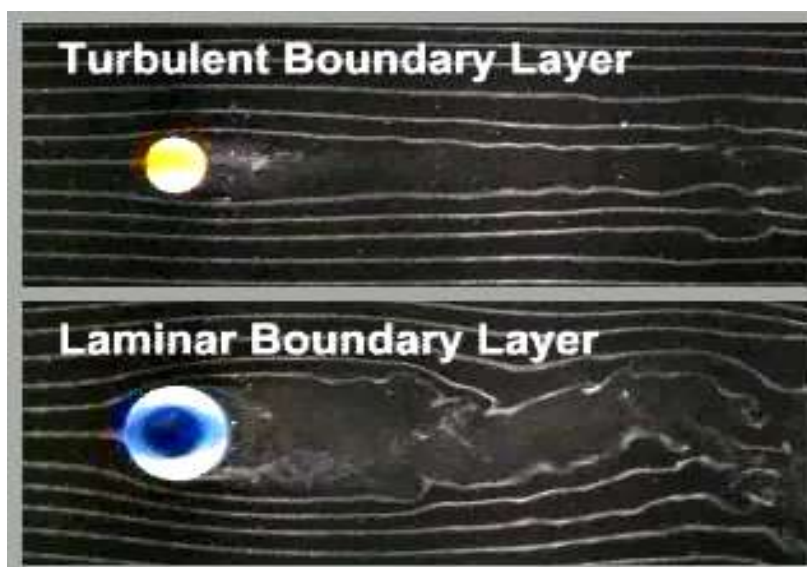
$$Re \approx 2 \times 10^5$$

$$Re \approx 3 \times 10^5$$



La crise de traînée

$$Re \approx 3 \times 10^5$$



$$Re \approx 2 \times 10^5$$

Le concept de *couche limite* fut présenté par **Ludwig Prandtl** en août 1904 à l'occasion du 3e congrès international des mathématiciens d'Heidelberg.

A partir des équations complètes de Navier-Stokes, il propose des équations simplifiées pour la couche limite, appelées maintenant *équations de Prandtl*, en utilisant des approximations pertinentes pour négliger certains termes des équations de Navier-Stokes



Ludwig Prandtl en 1904 devant son canal hydraulique de visualisation d'écoulements

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



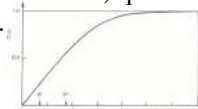
Heinrich Blasius
Ingénieur et professeur allemand (1883-1970)



Ludwig Prandtl
Ingénieur et physicien allemand (1875-1953)

Heinrich Blasius, un des premiers élèves de Prandtl, propose en 1908 un mode de calcul de la couche limite laminaire aboutissant à une équation différentielle (*équation de Blasius*) qu'on peut résoudre numériquement pour trouver le profil de vitesse (*profil de Blasius*).

$$2F''' + F''F = 0$$

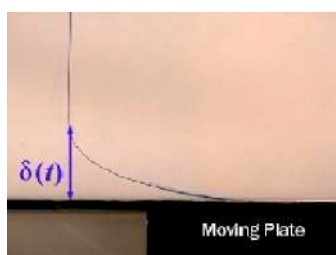


En 1912, L. Prandtl explique la crise de traînée de la sphère quantifiée par G. Eiffel en l'attribuant à la transition de la couche limite depuis un état laminaire jusqu'à un état turbulent.

2.2 Epaisseur de couches limites

Nous avons abordé la notion de couche limite dans plusieurs configurations

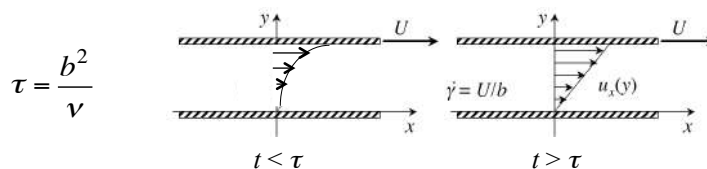
Écoulement de démarrage au voisinage d'une plaque plane



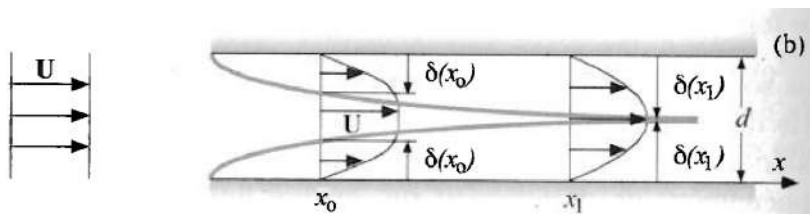
$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

épaisseur de couche limite

Temps d'établissement de l'écoulement de Couette entre deux plans



Longueur d'établissement de l'écoulement à l'entrée d'une conduite



diffusion visqueuse et advection

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

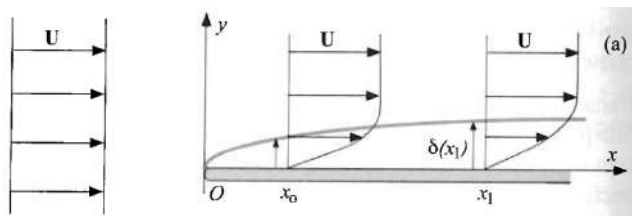
$$x = Ut$$

$$\delta = \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

Écoulement établi à $x = L_e$ où $\delta = b/2$:

$$L_e = \frac{b^2}{4\nu} U = \frac{\text{Re}}{4} b$$

Écoulement stationnaire à l'abord d'une plaque plane



diffusion visqueuse et advection

$$\delta = (\nu t)^{1/2}$$

$$x = Ut$$

$$\delta = \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

Ici encore, la couche limite croît comme $x^{1/2}$

Cette couche limite est d'autant plus fine que U est grand et ν faible

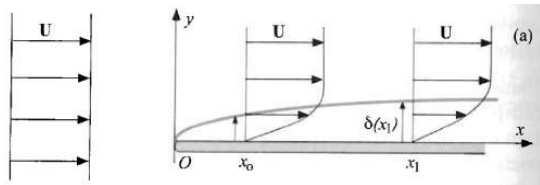
$$\frac{\delta(x)}{x} = \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/2} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}} \ll 1$$

Lorsque Re_x est grand, l'épaisseur de la couche limite est faible devant la longueur L de la plaque. Cette particularité, va permettre de simplifier les équations de NS, en aboutissant à l'équation de Prandl pour trouver le profil de vitesse caractéristique de la couche limite (profil de Blasius)

2.3 Equation de Prandtl

Considérons un écoulement 2C2D stationnaire $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{cases}$

caractérisé par une vitesse typique U suivant x en amont d'une plaque plane suivant x



On a vu que

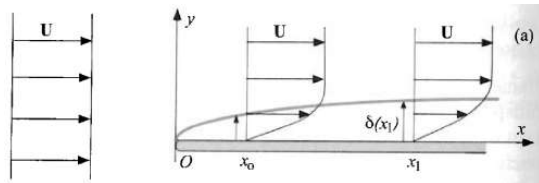
$$\frac{\delta(x)}{x} = \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} = \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

$$\delta(x) \ll x \text{ si } \text{Re}_x \gg 1$$

Il y a donc dans cet écoulement 2 échelle de longueurs : x et $\delta(x)$
 et par conséquent (par conservation de la masse) 2 échelles de vitesse :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

En ordre de grandeur $\frac{U}{x} \sim \frac{V}{\delta}$ d'où $V \sim \frac{\delta}{x} U \sim \frac{U}{\text{Re}_x^{1/2}} \ll U$



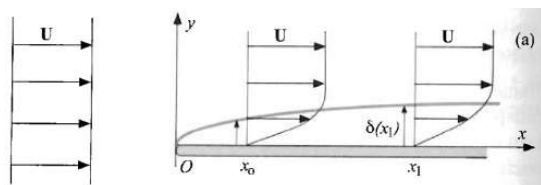
Les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour un écoulement 2C2D stationnaire

$$\begin{cases} \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

se simplifient alors dans la couche limite ($y < \delta$) :

$$\begin{cases} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad p(x) \end{cases}$$

La pression $p(x)$ dans la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. A noter qu'on comprend donc ici pourquoi le tube de Pitot fonctionne pour les fluides non parfaits



A l'intérieur de la couche limite, le terme visqueux domine, tandis qu'à l'extérieur de la couche limite, ce sont les termes inertiels qui dominent.

A l'extérieur de la couche limite, l'écoulement peut donc être considéré comme celui d'un fluide parfait satisfaisant à la relation de Bernoulli :

$$\frac{1}{2} \rho U_{ext}^2 + p = cte \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x}$$

L'équation de Navier-Stokes suivant x s'écrit alors dans la couche limite :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

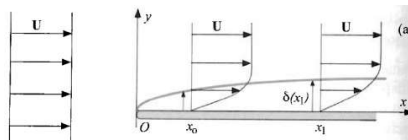
équation de Prandl (1904)



Cas d'un écoulement externe uniforme ($U_{ext} = cte$)

Dans ce cas l'équation de Prandl de couche limite s'écrit simplement

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$



Cette équation peut être adimensionnée en tenant compte des 2 échelles de longueurs et des 2 échelles de vitesse très différentes de l'écoulement dans la couche limite

$$x = x_0 \tilde{x} \quad y = \delta_{x_0} \tilde{y} = \frac{x_0}{\text{Re}_{x_0}^{1/2}} \tilde{y} \quad u_x = U \tilde{u}_x \quad u_y = \frac{U}{\text{Re}_{x_0}^{1/2}} \tilde{u}_y$$

L'équation de Prandl adimensionnée s'écrit alors :

$$\frac{U^2}{x_0} \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2 \text{Re}_{x_0}^{1/2}}{x_0 \text{Re}_{x_0}^{1/2}} \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} = \nu \frac{U \text{Re}_{x_0}}{x_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$\text{soit} \quad \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}^2}$$

et l'équation de conservation de la masse adimensionnée s'écrit :

$$\frac{U}{x_0} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{U \text{Re}_{x_0}^{1/2}}{x_0 \text{Re}_{x_0}^{1/2}} \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}^2} \qquad \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$$

On peut alors chercher une solution auto-similaire de la forme $\tilde{u}_x = Uf(\xi)$

$$\text{avec } \xi = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}}$$

avec les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(+\infty) = 1$
 La combinaison de l'équation du mouvement et de l'équation de conservation de la masse donne alors :

$$2f''(\xi) + f'(\xi) \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta = 0$$

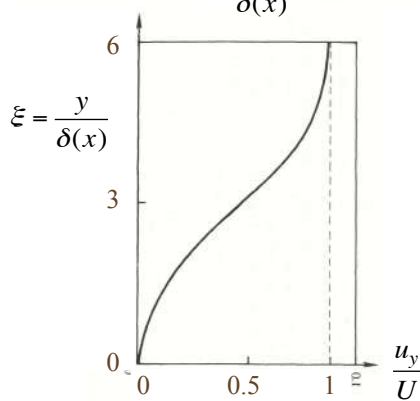
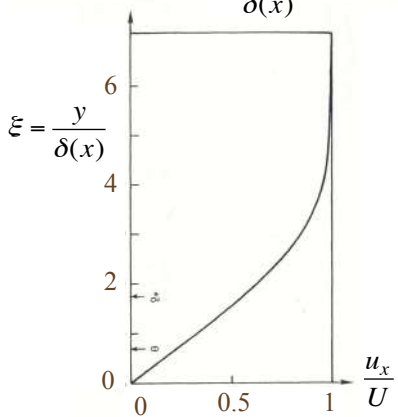
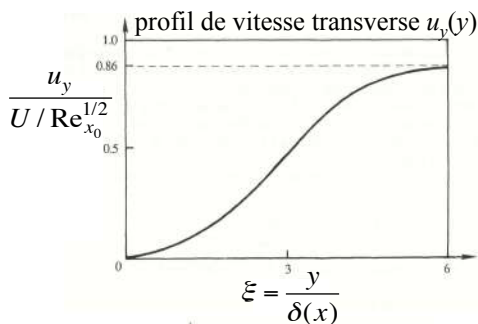
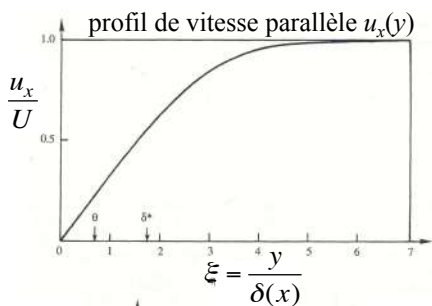
En posant $F(\xi) = \int_0^\xi f(\zeta) d\zeta = 0$

on aboutit à

$$2F''(\xi) + F'(\xi)F(\xi) = 0$$

équation de Blasius (1907)

Cette équation s'intègre numériquement et permet d'obtenir les profils de vitesses parallèle u_x et transverse u_y à la plaque en tout point (x,y) à partir du bord d'attaque $(0,0)$



Quelle est la contrainte tangentielle sur la plaque ?

La contrainte pariétale est

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Sans la calculer ici précisément avec le profil de vitesse précis, on peut facilement estimer son ordre de grandeur :

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U}{\delta} \quad \text{avec } \delta = (\nu x / U)^{1/2} \text{ épaisseur de couche limite}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \eta \frac{U^{3/2}}{(\nu x)^{1/2}}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} \sim \rho^{1/2} \eta^{1/2} U^{3/2} x^{-1/2}$$

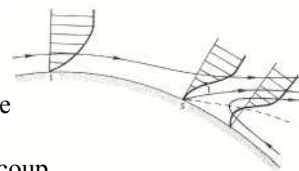
La force de traînée correspondante sur la plaque de longueur L et largeur l est

$$F_D \sim \int_0^L \rho^{1/2} \eta^{1/2} U^{3/2} x^{-1/2} l dx \sim \rho^{1/2} \eta^{1/2} U^{3/2} l L^{1/2}$$

Cette force n'est ni complètement visqueuse, ni complètement inertielle

Cette force n'est pas proportionnelle à L mais à $L^{1/2}$: elle est moins que double pour une plaque du double de longueur

Cas d'un écoulement externe non uniforme ($U_{ext} \neq cte$)



L'écoulement externe est non uniforme dans le cas d'une surface courbe. Dans ce cas il existe alors des gradient de pressions longitudinaux qui accélèrent ou ralentissent l'écoulement et du coup amincissent ou épaississent la couche limite. Dans ce dernier cas, la couche limite peut alors se détacher ou décoller.

En effet l'équation de Prandl
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

est issue de
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U_{ext} \frac{\partial U_{ext}}{\partial x}$$

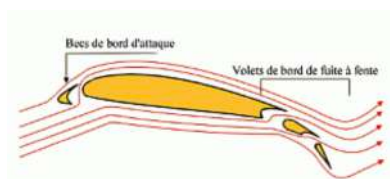
Si $\frac{\partial U_{ext}}{\partial x} > 0$ alors $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$: le fluide est accéléré et la couche limite s'amincit

Si $\frac{\partial U_{ext}}{\partial x} < 0$ alors $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$: le fluide est décéléré et la couche limite s'épaissit

si $\partial p / \partial x$ est suffisamment important, la vitesse du fluide près de la paroi peut s'inverser et la couche limite se détache ou décolle à partir de ce point de stagnation

Le décollement des couches limites induit un sillage important et donc une forte augmentation de la traînée de pression. Il est donc très important de bien profiler l'arrière des obstacles.

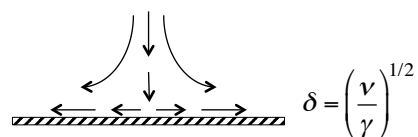
Il existe de nombreux dispositifs pour essayer de contrôler le décollement des couches limites : volets de bord d'attaque ou de bord de fuite sur les ailes à l'atterrissage, aspiration ou soufflage des couches limites, profilage des véhicules,...



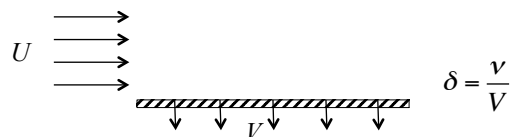
Cas de couches limites d'épaisseur constante

- Ecoulement de jet sur une plaque (écoulement élongationnel)

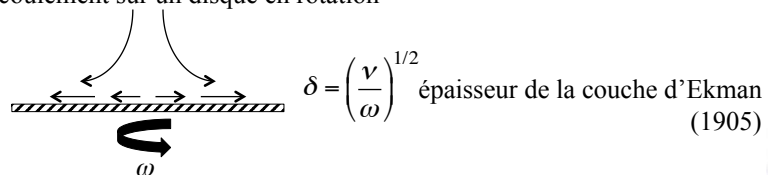
$$\begin{cases} u_x = \gamma x \\ u_y = -\gamma y \end{cases} \quad \gamma \text{ taux d'élongation}$$



- Ecoulement sur une plaque avec aspiration



- Ecoulement sur un disque en rotation

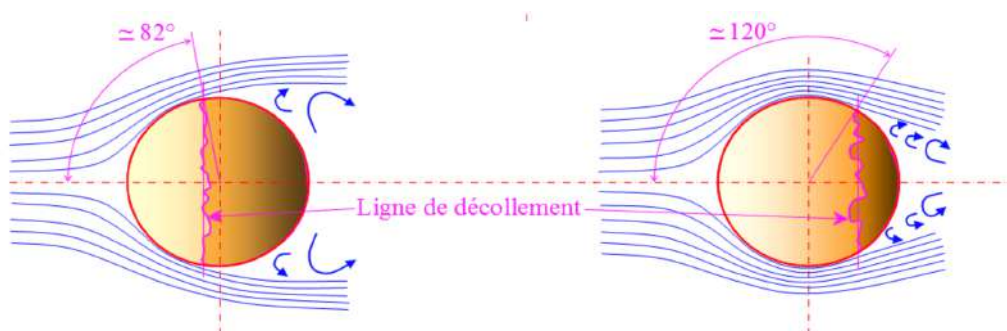


La crise de traînée

Cette brusque diminution du coefficient de traînée et donc de la force de traînée, appelée “crise de traînée” est due à un changement du champ de vitesse autour de la sphère. La *couche limite* (*boundary layer* en anglais), très mince zone proche de la sphère de transition entre la vitesse sur la sphère et la vitesse loin de la sphère, se modifie pour passer d’un régime laminaire à un régime turbulent et décolle plus en aval : le sillage en aval de la sphère est alors plus étroit, ce qui entraîne une réduction de force de traînée.

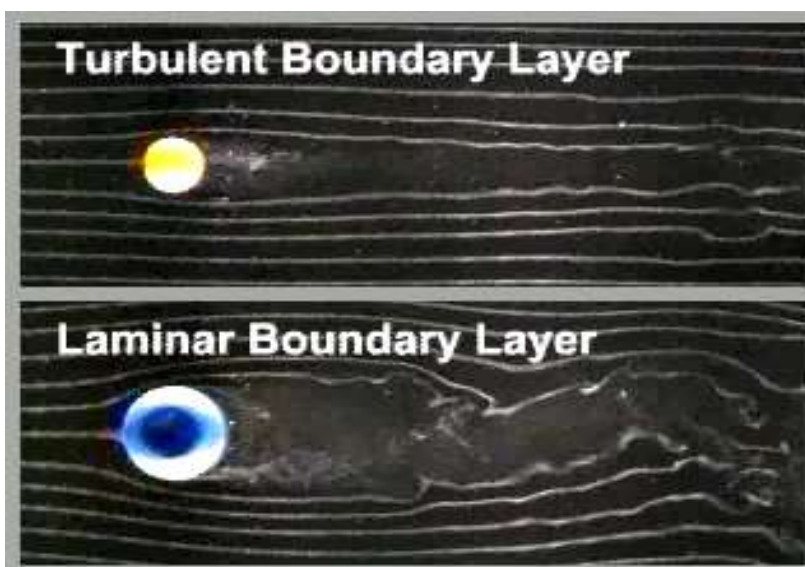
$$Re \approx 2 \times 10^5$$

$$Re \approx 3 \times 10^5$$



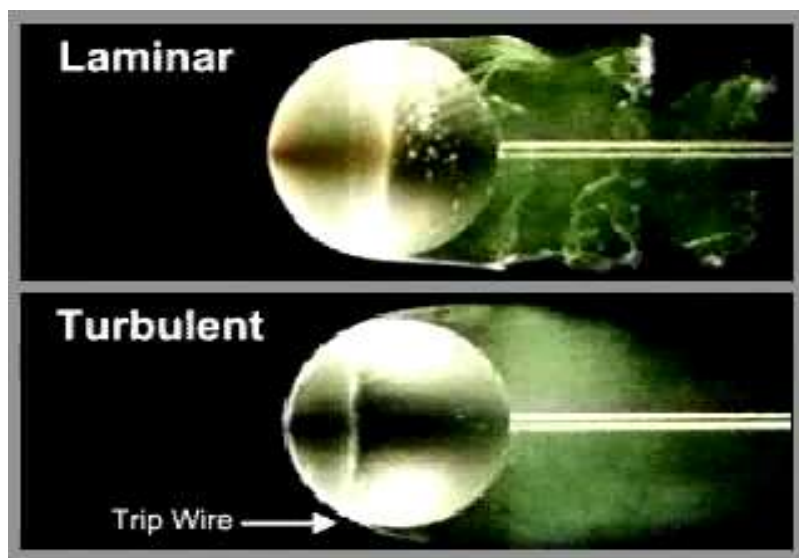
La crise de traînée

$$Re \approx 3 \times 10^5$$

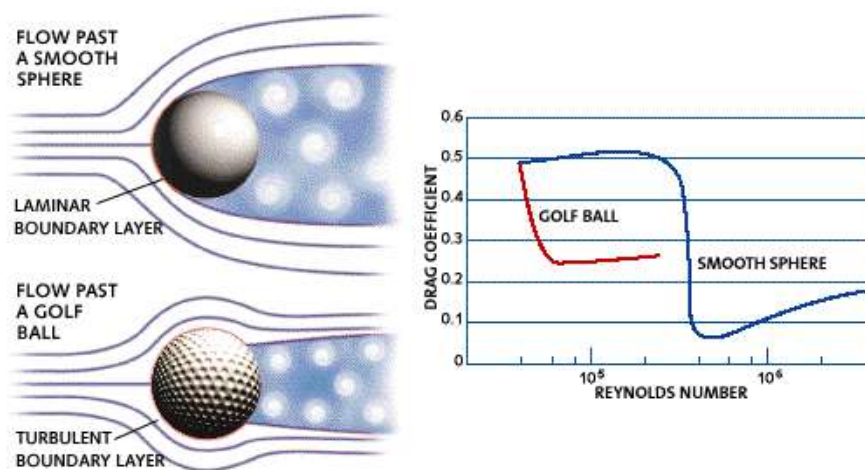


$$Re \approx 2 \times 10^5$$

Influence de la rugosité sur la crise de traînée :
un fil placé sur un sphère peut modifier la couche limite et provoquer la transition d'écoulement



Le comportement observé pour une sphère lisse l'est aussi pour une sphère rugueuse, mais pas aux même valeurs de Re...



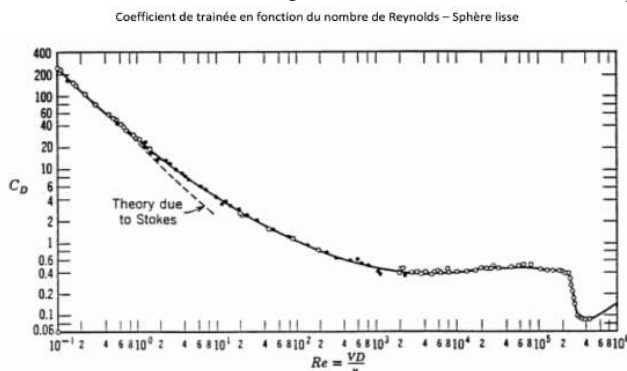
La crise de traînée utilisée dans les sports de balle

- golf (balle avec des trous)
- base-ball (balle avec des coutures)
- tennis (balle avec des poils)

Analyse dimensionnelle : de quoi dépend la force de traînée F_D ?

Pour une sphère lisse de diamètre D dans un fluide de masse volumique ρ et viscosité η à la vitesse relative U : $F_D(\rho, \eta, D, U)$

5 paramètres et 3 dimensions \Rightarrow 2 paramètres sans dimensions : $C_D(Re)$



Pour une sphère rugueuse de diamètre D et rugosité r dans un fluide de masse volumique ρ et viscosité η à la vitesse relative U : $F_D(\rho, \eta, D, r, U)$

6 paramètres et 3 dimensions \Rightarrow 3 paramètres sans dimensions : $C_D(Re, r/D)$

Aerodynamic forces on projectiles used in various sports

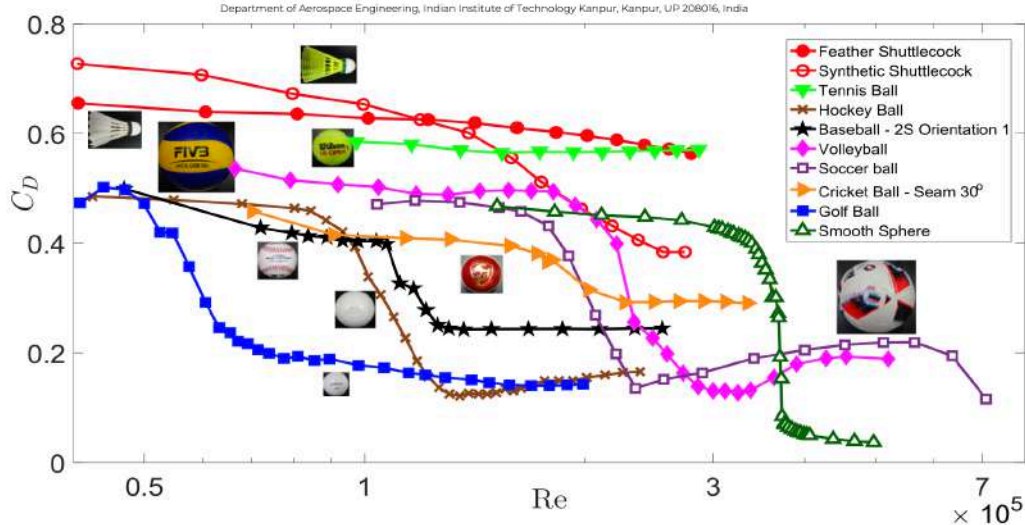
Cite as: Phys. Fluids 31, 015106 (2019); doi: 10.1063/1.5064700
 Submitted: 7 October 2018 • Accepted: 24 December 2018 •
 Published Online: 17 January 2019



Kunjal Shah, Ravi Shakya, and Sanjay Mittal

AFFILIATIONS

Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur, UP 208016, India



Chapitre XI

Ecoulements de fluides non-newtoniens

Fluide newtoniens

Fluides de viscosité constante, indépendante du taux de cisaillement et du temps.

Cas des fluides à petites molécules (air, eau, alcools, huiles végétales)

versus

Fluides non-newtoniens

Fluides de viscosité dépendant du taux de cisaillement et/ou du temps.

Cas des fluides complexes (polymères en solution ou fondus, mousses, émulsions, suspensions de particules, milieux granulaires)

I. Equation du mouvement

L'équation de Navier-Stokes $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u} = -\mathbf{grad}p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}_{\text{vol}}$

n'est valable que pour un fluide newtonien ($\eta = \text{cte}$)

L'équation du mouvement générale pour un fluide quelconque s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{u} = -\mathbf{grad}p + \mathbf{div}[\boldsymbol{\sigma}'] + \rho \mathbf{f}_{\text{vol}}$$

où $[\boldsymbol{\sigma}']$ est le tenseur des contraintes visqueuses (tangentiels et normales) liées aux taux de déformation du fluide, hors partie diagonale correspondant à la pression isotrope

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$$

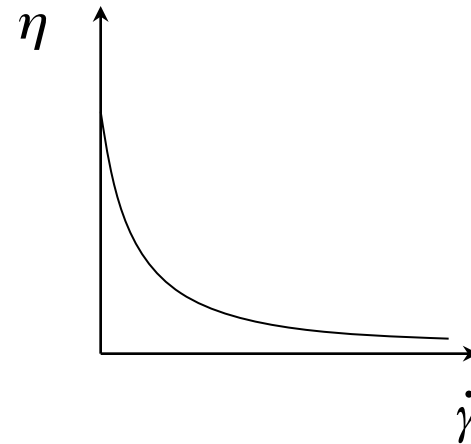
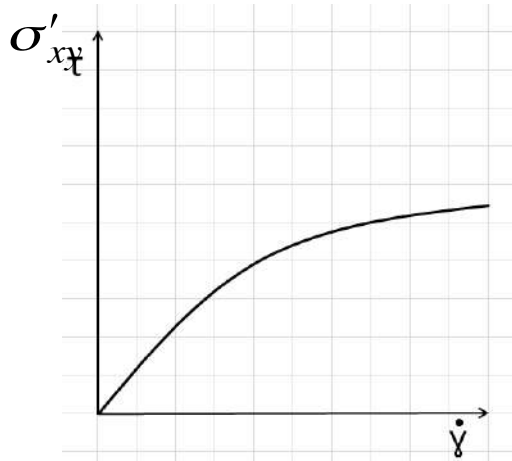
La relation entre contraintes visqueuses $\{\sigma'_{ij}\}$ et taux de déformations $\partial u_i / \partial x_j$, appelée **“équation constitutive”** du fluide doit être spécifiée pour pouvoir résoudre l'équation et obtenir le champ de vitesse d'un écoulement avec ses conditions aux limites.

C'est le plus souvent une relation entre la contrainte de cisaillement σ'_{xy} et le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \partial u_x / \partial y$

II. Fluides visqueux non-newtoniens

1. Fluides rhéofluidifiants

loi constitutive : $\sigma'_{xy} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ avec $\eta(\dot{\gamma})$ fonction décroissante du taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \partial u_x / \partial y$

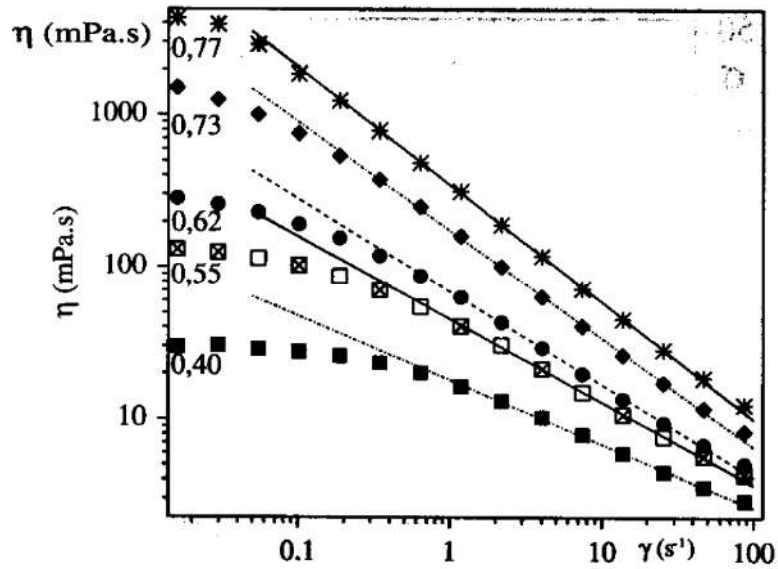


Le comportement rhéofluidifiant est fréquent : polymère fondus, polymères en solution, émulsions, peintures, boues,...

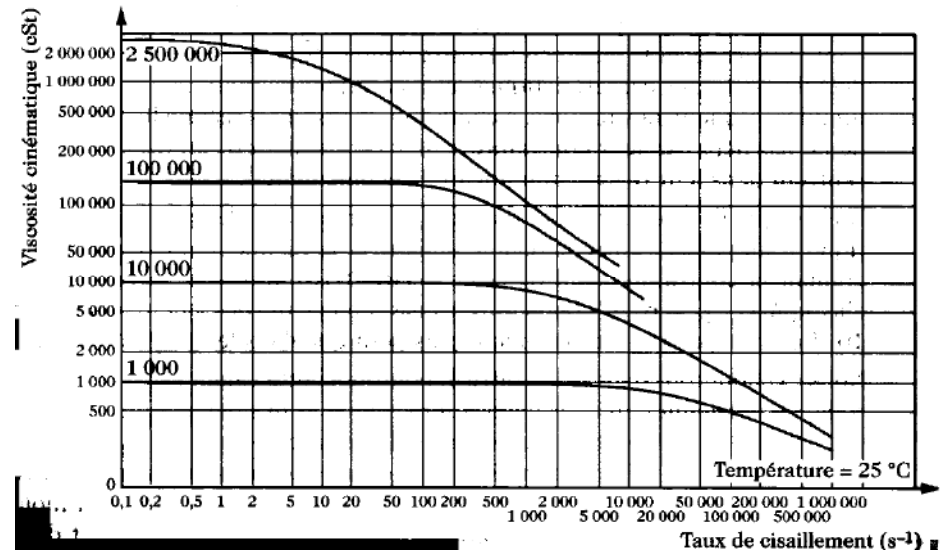
La loi constitutive de certains de ces fluides peut être une loi de puissance :

$$\sigma'_{xy} = k\dot{\gamma}^n$$

avec $0 < n < 1$ et un paramètre k qui n'est pas un coefficient de viscosité mais de "consistance" (! sa dimension dépend de n)



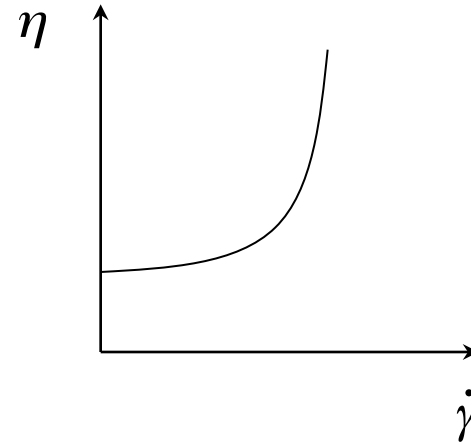
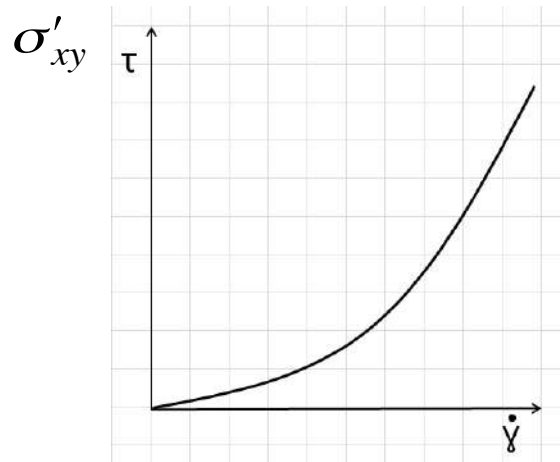
Solutions aqueuses de scléroglycane
de différentes concentrations
(C. Allain et al., FAST)



Huiles silicones (polydiméthylsiloxanes)
De différents poids moléculaires et viscosité
(Rhodorsil 47V, Rhodia)

2. Fluides rhéoépaississants

loi constitutive : $\sigma'_{xy} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ avec $\eta(\dot{\gamma})$ fonction croissante du taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \partial u_x / \partial y$

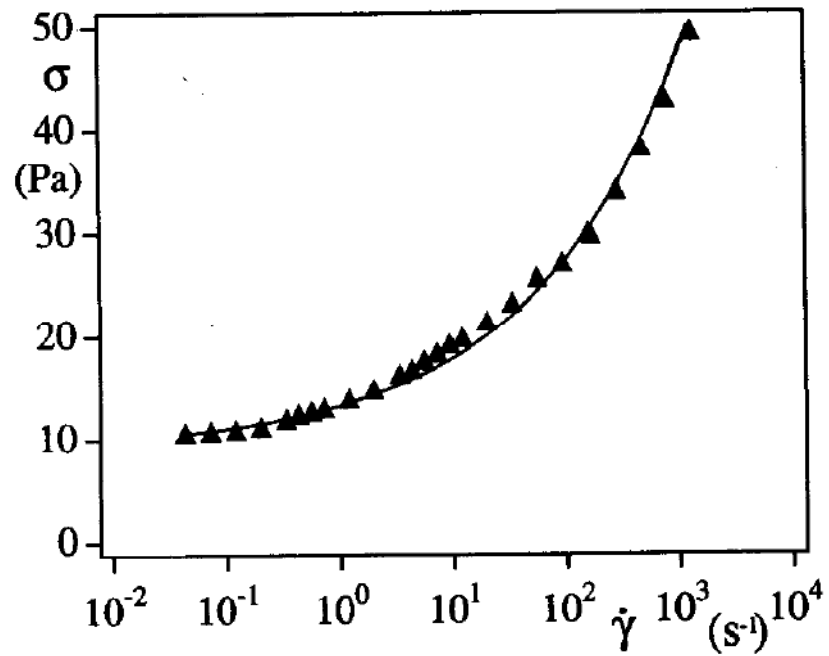


Le comportement rhéoépaississant est moins fréquent. Le cas le plus connu est celui des suspensions concentrées de farine de maïs (Maizena).

La loi constitutive de certains de ces fluides peut être une loi de puissance :

$$\sigma'_{xy} = k\dot{\gamma}^n$$

avec $n > 1$ et un paramètre k qui n'est pas un coefficient de viscosité mais de "consistance" (! sa dimension dépend de n)

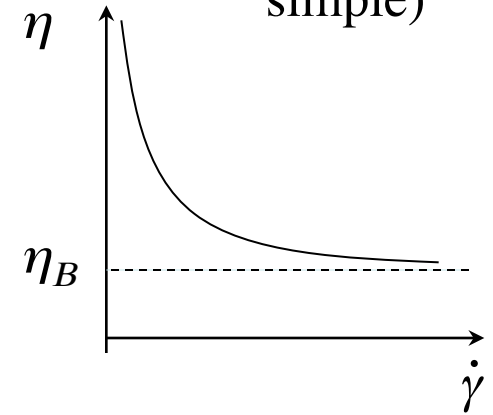
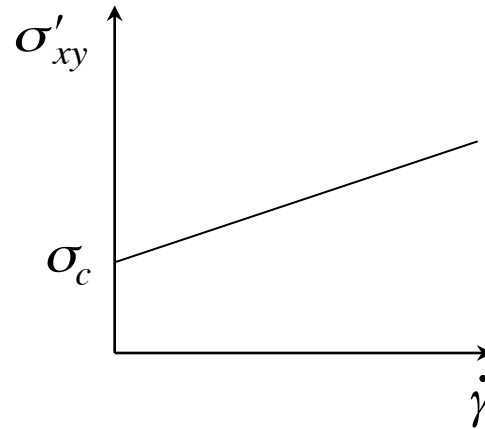


Mélange eau-kaolin (argile)
(P. Coussot et al.)

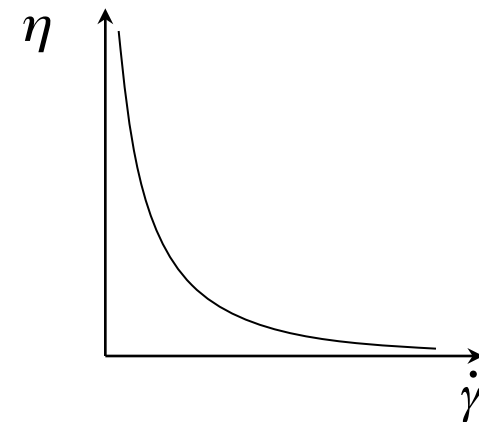
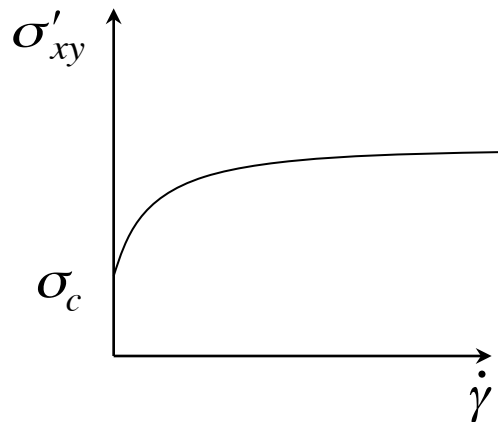
3. Fluides à seuil

loi constitutive : $\sigma'_{xy} = \sigma_c + \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ avec σ_c contrainte seuil d'écoulement

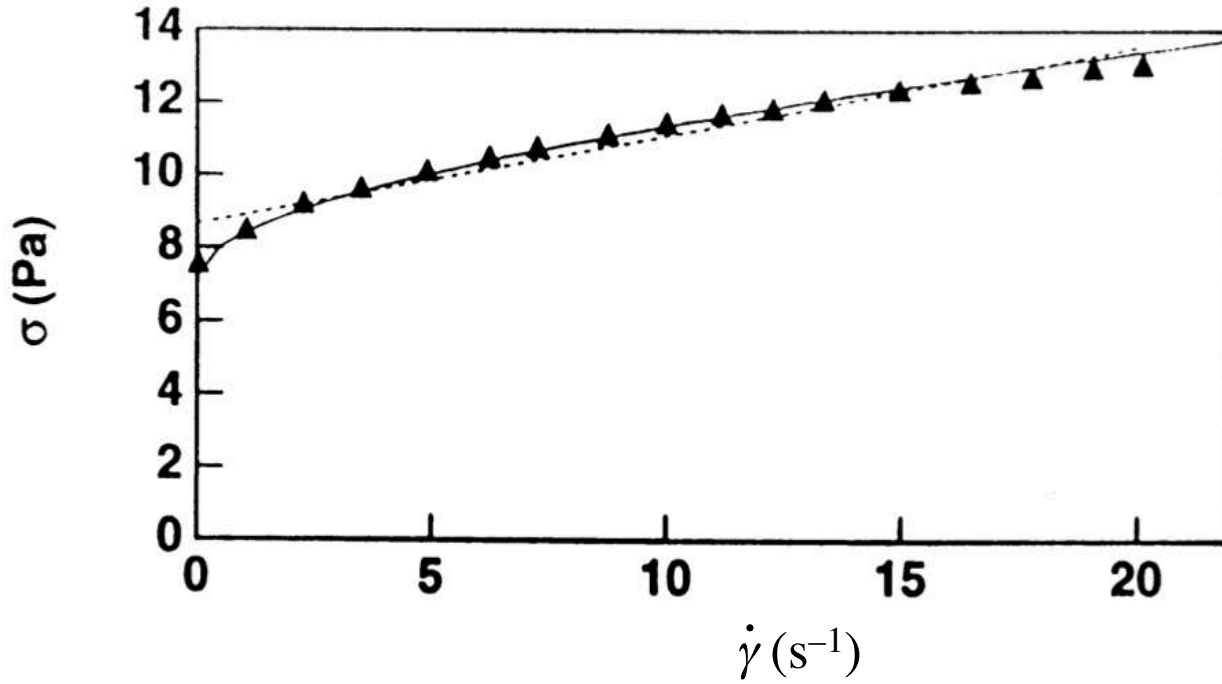
souvent modélisée par $\sigma'_{xy} = \sigma_c + \eta_B \dot{\gamma}$ modèle de Bingham (le plus simple)



ou par $\sigma'_{xy} = \sigma_c + k\dot{\gamma}^n$ modèle de Herschel-Bulkley



Les fluides à seuil ne sont pas rares : pâtes de dentifrice, boues (laponite), ...



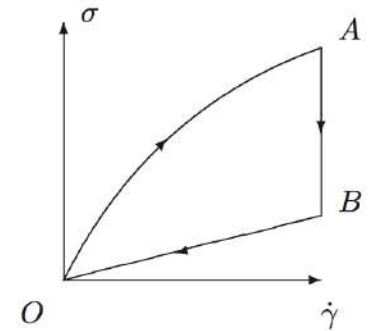
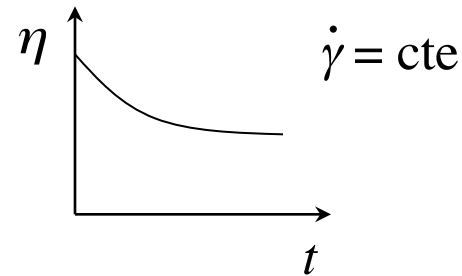
Exemple de rhéogramme d'une boue de forage

4. Thixotropie

Certains fluides ont une viscosité qui dépend du temps (histoire du cisaillement).

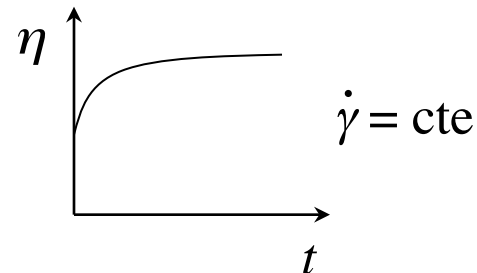
La thixotropie correspond à une diminution de la viscosité d'un fluide avec le temps de cisaillement.

Fluides thixotropes
exemple : ketchup



L'antithixotropie ou rhéopexie correspond au contraire à l'augmentation de la viscosité d'un fluide avec le temps de cisaillement.

Fluides antithixotropes
exemple : bétons



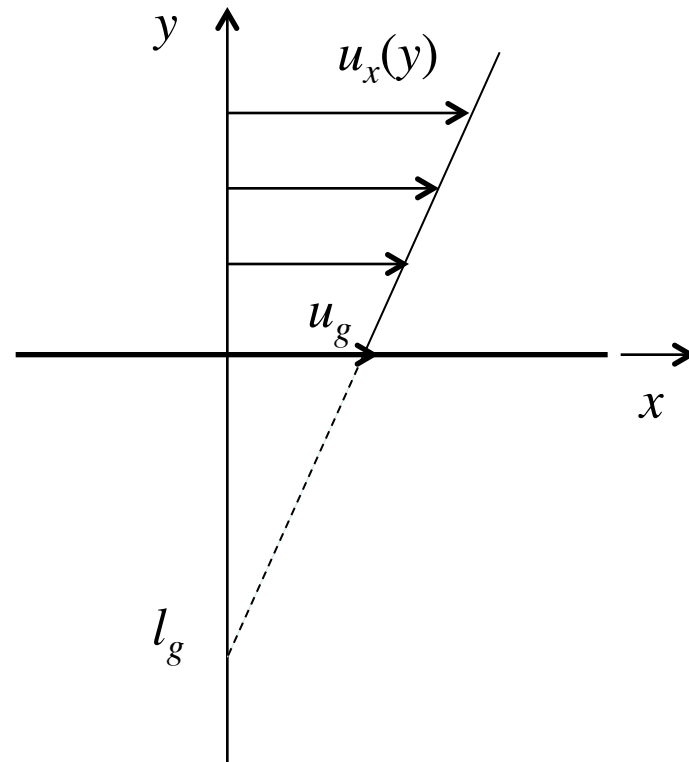
Différents types de rhéomètres permettant la mesure de viscosité

- à vitesse imposée (mesure de force)
- à force imposée (mesure de vitesse)



5. Conditions aux limites

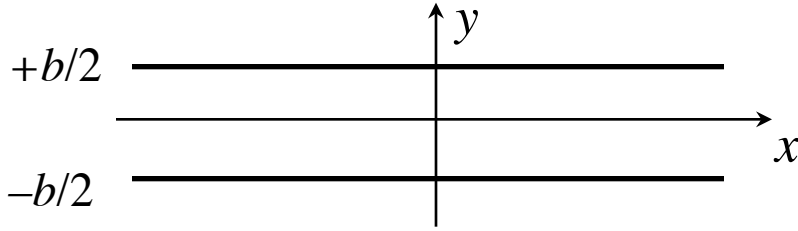
Certains fluides, comme par exemples les polymères fondus, ne satisfont pas la condition usuelle de non-glissement à la paroi. Il faut alors introduire une vitesse de glissement ou plutôt une longueur de glissement.



$$u_g = l_g \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{\text{paroi}}$$

6. Ecoulement en conduite

Considérons le cas simple d'une conduite plane (2 parois // distantes de b) avec gradient longitudinal de pression constant suivant x



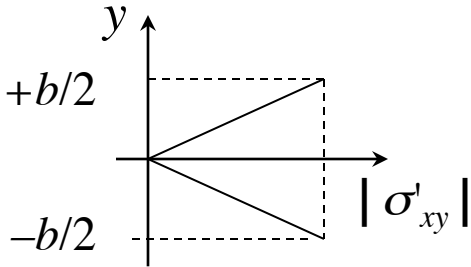
L'équation du mouvement suivant x s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial t}} + u_x \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial x}} + u_y \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial y}} + u_z \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial z}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\cancel{\partial \sigma'_{xx}}}{\cancel{\partial x}} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\cancel{\partial \sigma'_{xz}}}{\cancel{\partial z}}$$

Dans le cas stationnaire et uniforme, cette équation se réduit à :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y}$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{\partial p}{\partial x} y \quad (1) \quad \text{par raison de symétrie}$$



En considérant la loi rhéologique

$$\eta = \eta_0 \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|^\alpha$$

avec $\alpha = 0$ pour un fluide newtonien

$\alpha > 0$ pour un fluide rhéofluidifiant

$\alpha < 0$ pour un fluide rhéoépaississant

donnant
$$\sigma'_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \eta_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^{1+\alpha}$$

L'équation du mouvement (1) s'écrit alors :

$$\eta_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^{1+\alpha} = \frac{\partial p}{\partial x} y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \left(\frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| y \right)^{1/(1+\alpha)}$$

$$u_x(y) = \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \left(\frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right)^{1/(1+\alpha)} y^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} + \text{cte}$$

Avec les CL de non glissement aux parois $u_x(\pm b/2) = 0$, le profil de vitesse est :

$$u_x(y) = \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \left(\frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right)^{1/(1+\alpha)} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} - y^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \right]$$

En introduisant la vitesse moyenne

$$\bar{u}_x(y) = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} u_x(y) dy = \frac{1+\alpha}{3+2\alpha} \left(\frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right)^{1/(1+\alpha)} \left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}$$

Le profil de vitesse s'écrit finalement :

$$\frac{u_x(y)}{\bar{u}_x} = \frac{3+2\alpha}{2+\alpha} \left(\frac{1}{\eta_0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right)^{1/(1+\alpha)} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \right]$$

Exemple de profils de vitesse issus de simulations de "gaz sur réseaux" BGK (symboles) pour des fluides avec une viscosité en loi de puissance ($n = 1 + \alpha$)

Figure tirée de Rakotomalala et al., Phys. Fluids 8, 3200 (1996)

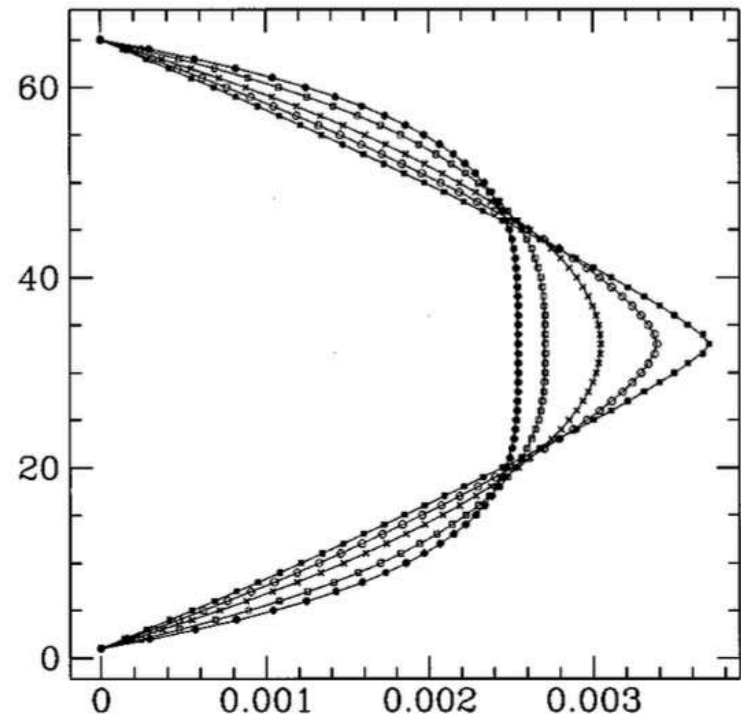


FIG. 1. Velocity profiles (y versus u_x) for the power-law fluid stationary flow, for $n=1/3;1/2;1;2;5$ (dots). The lattice contains 65 nodes on y -direction. The crosses correspond to a Newtonian fluid ($n=1$), the full squares to $n=5$. The larger the value of n , the sharper the profile. The solid lines are the theoretical velocity profiles of Equation (4).

III. Fluides viscoélastiques



comportement visqueux ou élastique ?

Certains fluides (voire tous?) présentent les deux comportements.

Il est admis que pour une déformation γ suffisamment petites ($\gamma < 10^{-2}$), les relations contraintes-déformations restent linéaires. Pour des grandes déformations, ce n'est plus le cas.

L'expérience "la plus longue du monde"

goutte de poix (bitume)



"Pitch drop experiment" (Thomas Parnell, 1927)

1927 : mise en place de l'expérience

1930 : le bouchon est retiré

Décembre 1938 : chute de la 1^{ère} goutte (temps de formation en mois : 96-108)

Février 1947 : 2^{ème} goutte (100)

Avril 1954 : 3^{ème} goutte (108)

Mai 1962 : 4^{ème} goutte (97)

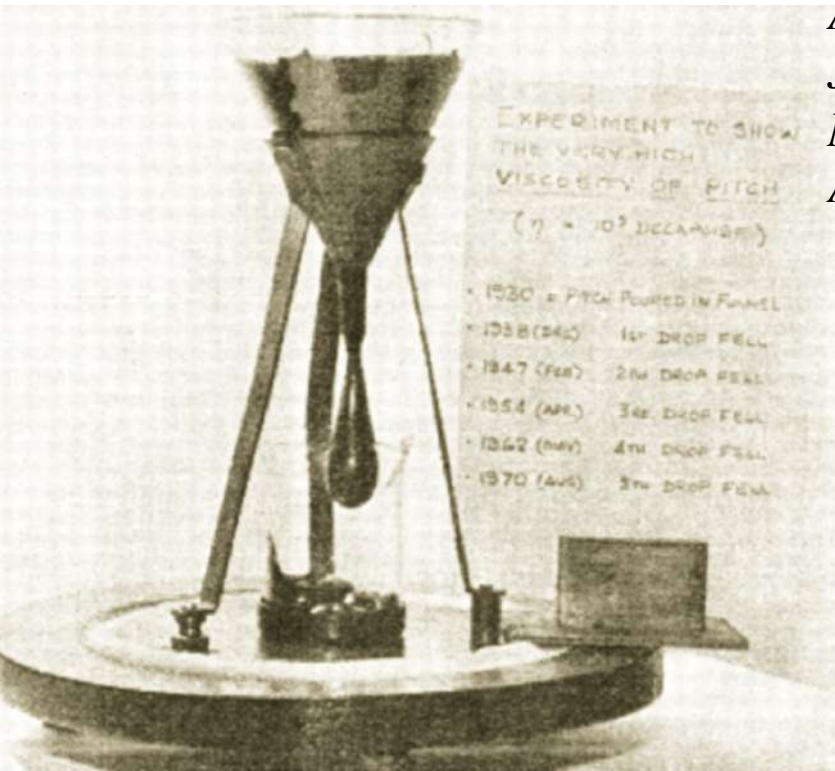
Août 1970 : 5^{ème} goutte (99)

Avril 1979 : 6^{ème} goutte (104)

Juillet 1988 : 7^{ème} goutte (111)

Novembre 2000 : 8^{ème} goutte (148)

Avril 2014 : 9^{ème} goutte (156)

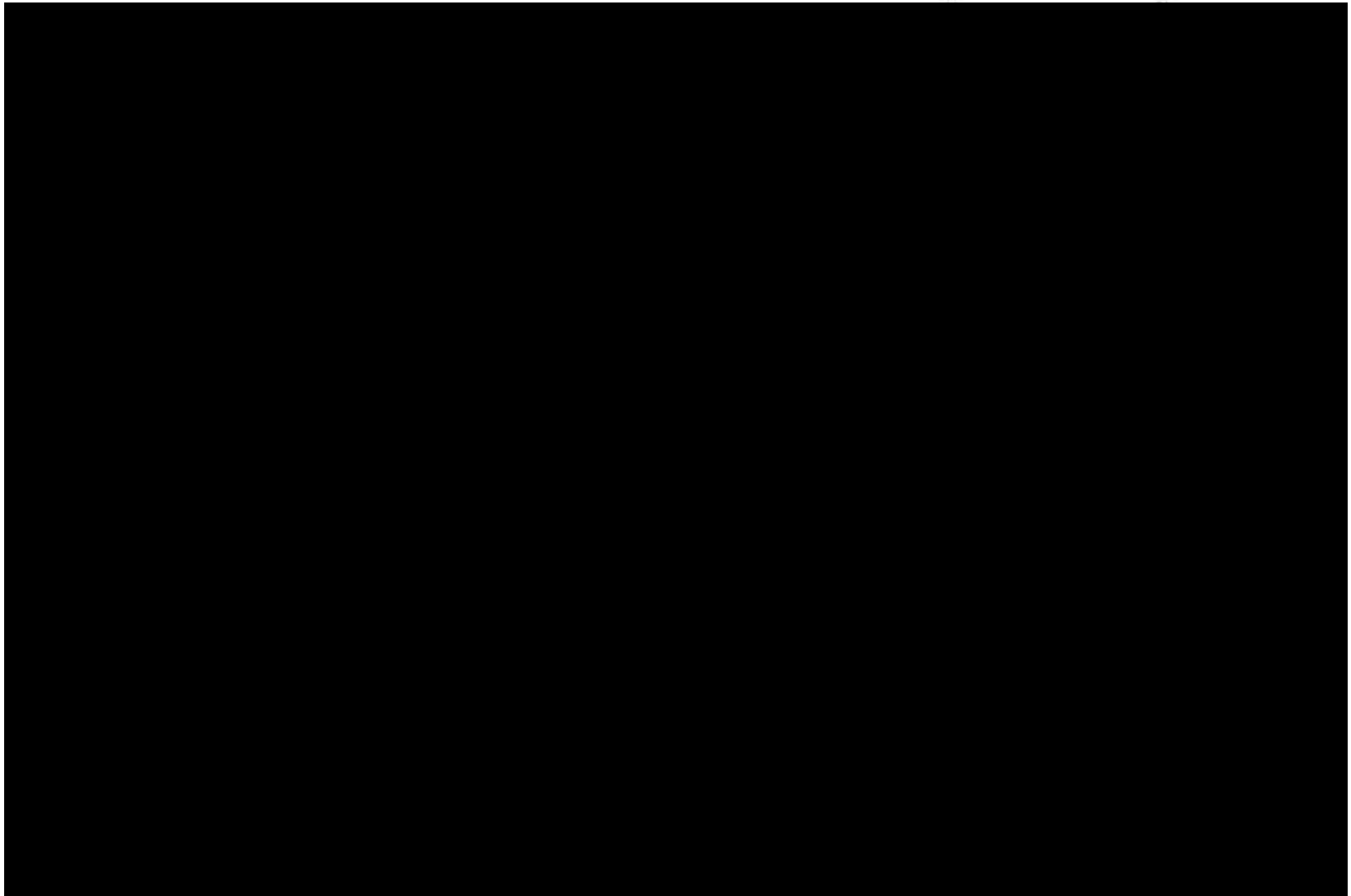
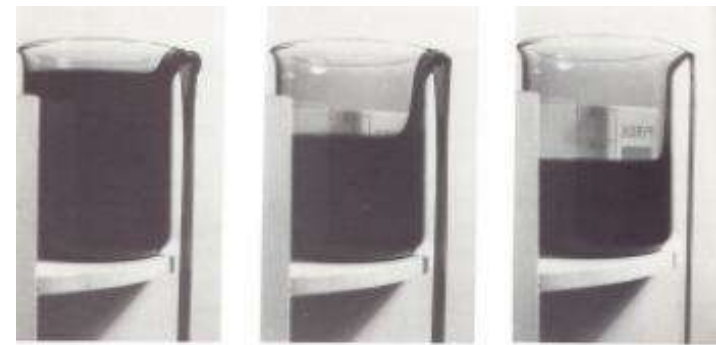


$$\eta_{\text{bitume}} \approx 10^{11} \eta_{\text{eau}}$$



Fluides viscoélastiques : syphon sans tube!

déjà décrit par Tacite en 90 après J.C.
(récupération du bitume en mer noire)



1. Régime linéaire

Dans ce régime de petite déformations, en considérant une sollicitation harmonique à la pulsation ω

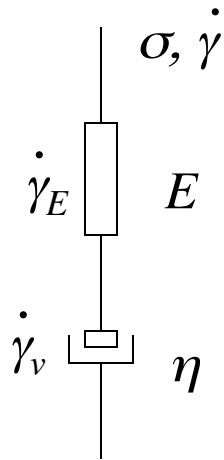
$$\eta(\omega) = \eta'(\omega) + i\eta''(\omega)$$

viscosité complexe
dépendant de γ ou ω

terme réel
visqueux

terme imaginaire
élastique

Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique est le modèle de Maxwell (1867) constitué d'un ressort élastique et d'un amortisseur visqueux en série



$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_v + \dot{\gamma}_E \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\eta\dot{\gamma} = \sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt}$$

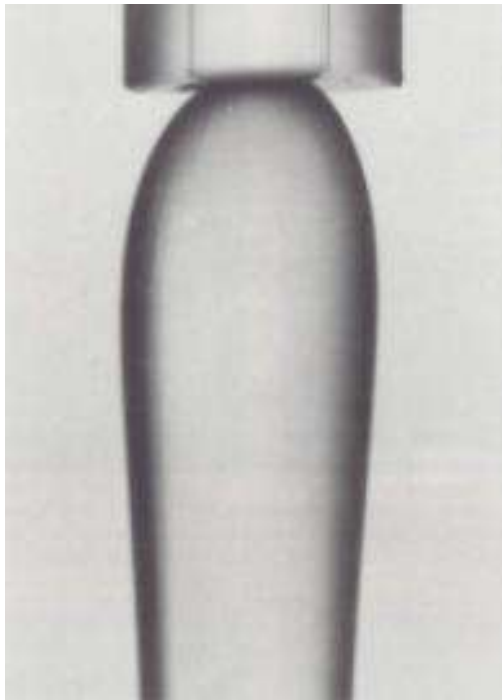
$$\text{avec } \tau = \frac{\eta}{E}$$

temps de relaxation

2. Régime non linéaire

Dans les cas de grandes déformations, le régime n'est plus linéaire et il apparaît des comportements inhabituels

Gonflement en sortie de filière
(die swell)



Montée à une tige en rotation
(effet Weissenberg)



On ne peut expliquer ces phénomènes que par l'apparition sous cisaillement de différences de contraintes normales élastiques (non dissipatives)

a. Différences de contraintes normales N_1 et N_2

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yy} & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix}$$

Dans le tenseur des contraintes visqueuses, on introduit alors les deux différences de contraintes normales :

$$N_1 = \sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} \quad 1^{\text{ère}} \text{ différence de contraintes normales}$$

$$N_2 = \sigma'_{yy} - \sigma'_{zz} \quad 2^{\text{ème}} \text{ différence de contraintes normales}$$

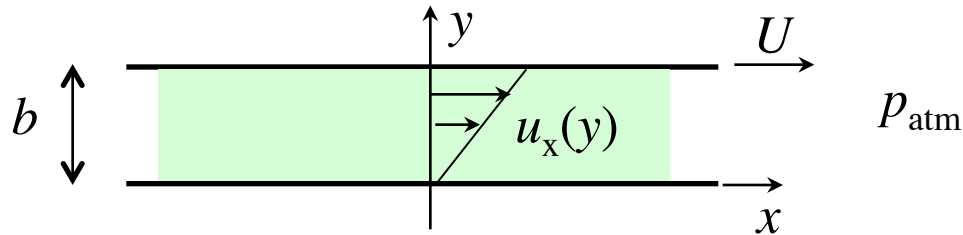
où x est la direction principale de la vitesse et y la direction principale du cisaillement

En général

$$N_1 \gg N_2$$
$$N_1 > 0 \text{ et } N_2 < 0$$

b. Mesure de N_1 en cisaillement simple

Considérons un fluide viscoélastique cisailé dans le plan (x,y) entre deux parois planes perpendiculaires à la direction y et animée d'une vitesse relative suivant x . On peut alors supposer un écoulement parallèle de vitesse unidirectionnelle $u_x(y)$ avec invariance suivant x .



les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial(-p + \sigma'_{yy})}{\partial y} = 0$$

$$-p + \sigma'_{yy} = \text{cte indépendante de } y$$

Pour maintenir les plaques à la distance b , il faut donc leur appliquer la force par unité de surface

$$f_{\text{ext}} = p - \sigma'_{yy} - p_{\text{atm}}$$

D'autre part, $-p + \sigma'_{xx} = -p_{\text{atm}}$ sur les bords verticaux libres de l'échantillon fluide,

et donc $p = \sigma'_{xx} + p_{\text{atm}}$

La force extérieure à appliquer pour maintenir les plaques à la distance b est donc égale à

$$f_{\text{ext}} = \sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} = N_1$$

qui la première différence des contraintes normales N_1 .

En mesurant cette force normale sur les plaques lorsque le fluide est cisailé, on peut donc mesurer donc N_1 (et sa variation éventuelle avec le taux de cisaillement en variant celui-ci).

Certains rhéomètres perfectionnés permettent depuis quelques années cette mesure.

Rhéomètres mesurant non seulement les contraintes de cisaillement
mais aussi les contraintes normales (N_1)



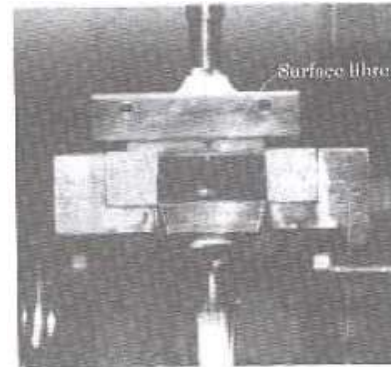
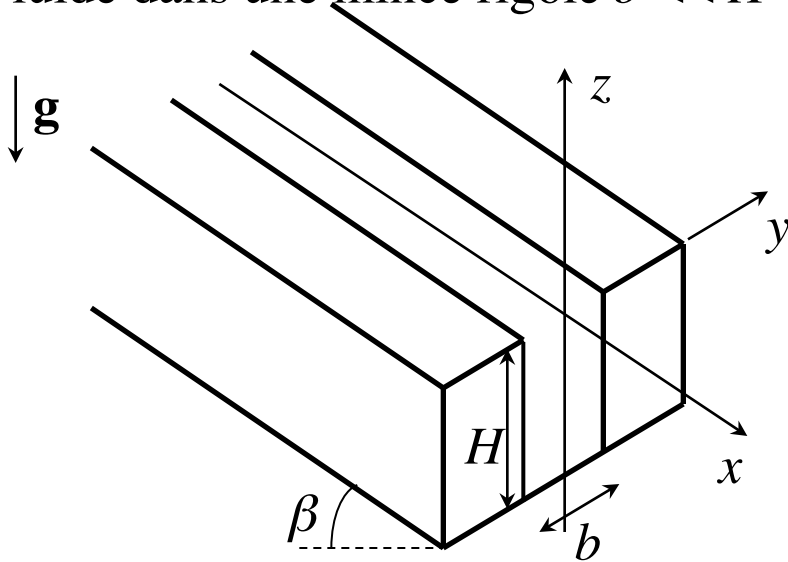
Gonflement en sortie de filière (“die swell”)

c. Mesure de N_2 par mesure du bombement de surface libre en rigole inclinée

Tanner (1970)



Fluide dans une mince rigole $b \ll H \ll L$ incliné d'un angle β



fluide newtonien



fluide viscoélastique

Ecoulement stationnaire parallèle $u_x(y)$ considéré comme invariant suivant x et z avec cisaillement $\partial u_x / \partial y$ dans le plan (x, y) et donc $\sigma'_{xy} \neq 0$ mais $\sigma'_{xz} = \sigma'_{yz} = 0$

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \rho g \sin \beta \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \cos \beta \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \sigma'_{xy} = -\rho g y \sin \beta \quad \text{car } \sigma'_{xy} = 0 \text{ au centre par raison de symétrie}$$

$$(2) \Rightarrow p = \sigma'_{yy} + \text{cte}(z)$$

$$(3) \Rightarrow p = -\rho g z \cos \beta + \text{cte}(y)$$

$$\text{d'où } p = \sigma'_{yy} - \rho g z \cos \beta + \text{cte}$$

$$\text{qui peut aussi s'écrire } p - \sigma'_{zz} = \underbrace{\sigma'_{yy} - \sigma'_{zz}}_{N_2} - \rho g z \cos \beta + \text{cte}$$

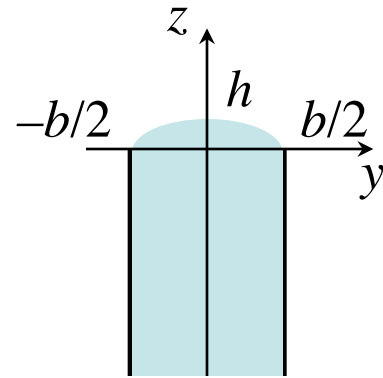
A la surface au milieu de la rigole ($z = h, y = 0$), $p - \sigma_{zz} = p_{\text{atm}}$ et $\sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = 0$
car pas de cisaillement

$$\text{d'où } h = \frac{\text{cte} - p_{\text{atm}}}{\rho g \cos \beta}$$

A la surface au bord de la rigole ($z = 0, y = \pm b/2$), $p - \sigma'_{zz} = p_{\text{atm}}$

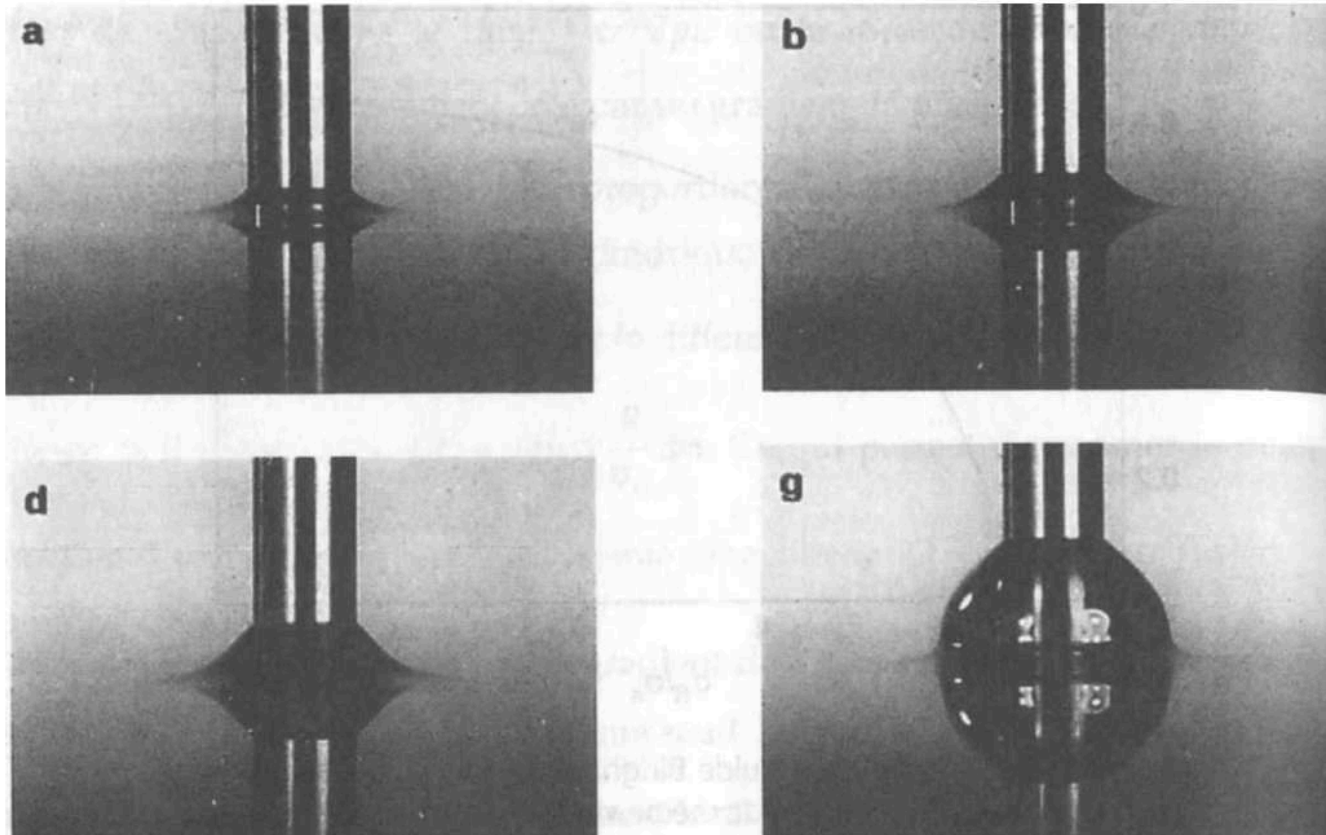
$$\text{d'où } p_{\text{atm}} = (\sigma'_{yy} - \sigma'_{zz})_{y=\pm b/2} + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = p_{\text{atm}} - N_2 \Big|_{y=\pm b/2}$$

$$\text{et donc } h = \frac{-N_2 \Big|_{y=\pm b/2}}{\rho g \cos \beta}$$



En mesurant h , on peut donc mesurer N_2 pour le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \frac{\rho g b \sin \beta}{2\eta}$

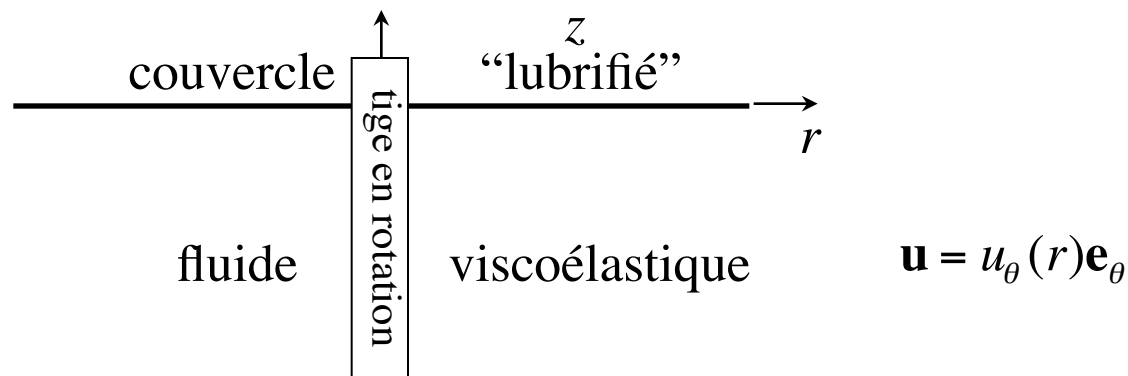
d. Montée d'un fluide viscoélastique le long d'une tige en rotation : N_1 ou N_2 ?



Ascension d'une solution de polyisobutylène le long d'un barreau de diamètre 6 mm tournant à la vitesse (b) $\omega = 2$ tour/min, (d) $\omega = 3$ tour/min et (g) $\omega = 7$ tour/min. En l'absence de rotation (a), l'ascension est d'origine capillaire.

Beavers & Joseph, J. Fluid Mech. 69, 475 (1975)

Pour simplifier, considérons un fluide dont la surface ne peut se déformer sous une plaque rigide mais supposée sans frottement (surface “pseudo-libre”)



Les équations du mouvement suivant r et θ s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{rr}) - \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{r} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma'_{r\theta}) \end{array} \right. \quad (2)$$

Le fluide exerce sur le couvercle la force surfacique $p - \sigma'_{zz}$ dont on peut calculer le profil.

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{rr}) - \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{r} + \rho \frac{u_\theta^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial r} = \frac{\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial(\sigma'_{rr} - \sigma'_{zz})}{\partial r} + \rho \frac{u_\theta^2}{r}$$

$$\text{or (2)} \Rightarrow \frac{\partial \sigma'_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{2\sigma'_{r\theta}}{r}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial r} = \frac{\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}}{r} - \frac{2\sigma'_{r\theta}}{r} \frac{\partial(\sigma'_{rr} - \sigma'_{zz})}{\partial \sigma'_{r\theta}} + \rho \frac{u_\theta^2}{r}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial \ln r} = \underbrace{\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}}_{-N_1} - 2\sigma'_{r\theta} \frac{\partial}{\partial \sigma'_{r\theta}} \underbrace{(\sigma'_{rr} - \sigma'_{zz})}_{N_2} + \rho u_\theta^2$$

$$\text{Si le fluide est newtonien } (N_1 = N_2 = 0), \text{ on a alors} \quad \frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial \ln r} = \rho u_\theta^2 > 0$$

La variation positive implique qu'un creusement (descente du liquide newtonien) vers la tige (vers les r décroissants) par effet centrifuge

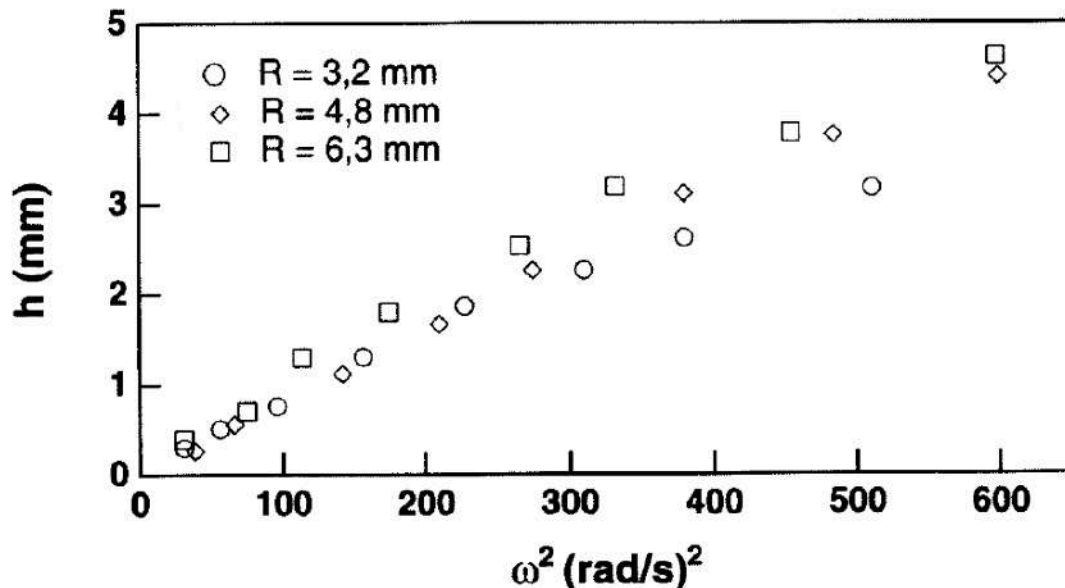
Si le fluide est viscoélastique, les différences de contraintes normales, notamment N_1 ($N_2 \ll N_1$) peuvent être plus importantes que le terme centrifuge, et l'équation

$$\frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial \ln r} = \underbrace{\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}}_{-N_1} - 2\sigma'_{r\theta} \frac{\partial}{\partial \sigma'_{r\theta}} \underbrace{(\sigma'_{rr} - \sigma'_{zz})}_{N_2} + \rho u_\theta^2$$

se réduit alors à

$$\frac{\partial(p - \sigma'_{zz})}{\partial \ln r} \approx -N_1 < 0$$

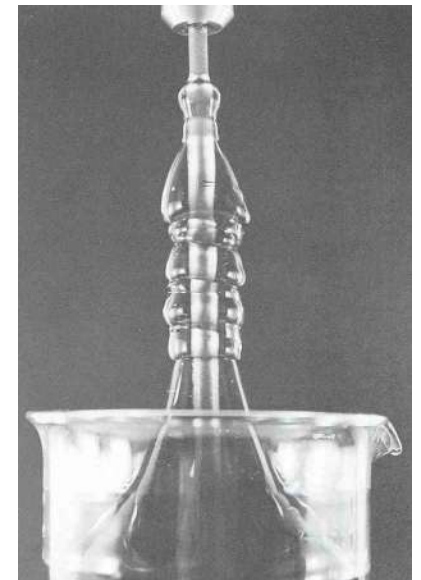
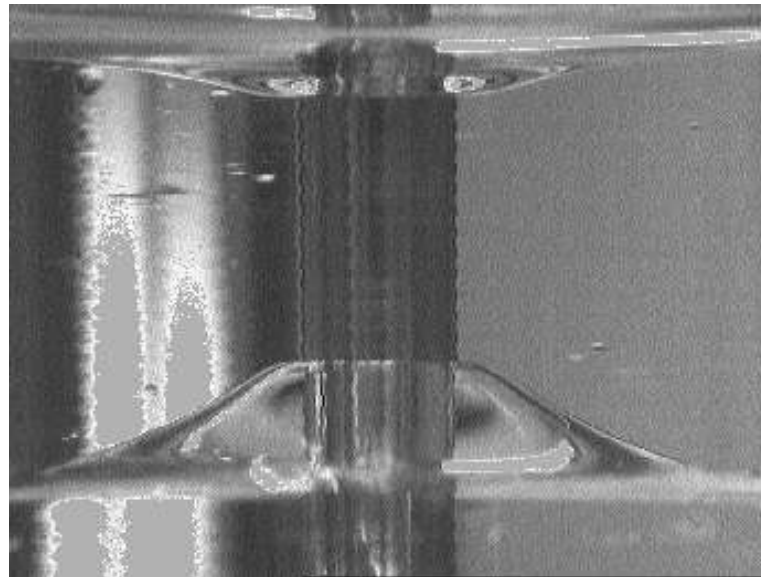
Comme $N_1 > 0$, le comportement observé est alors le contraire d'un fluide newtonien avec une montée à la tige (vers les r décroissants)



Hauteur d'ascension d'une solution de polyisobutylène en fonction de la vitesse de rotation ω d'une tige de rayon R .

Beavers & Joseph, J. Fluid Mech. 69, 475 (1975)

Montée le long d'une tige en rotation de fluides viscoélastiques



2 fluides (D. Bonn et al., LPS ENS)

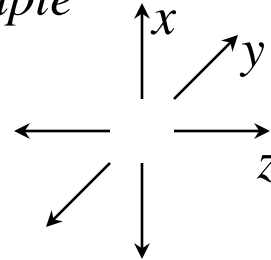
e. Viscosité élongationnelle

La viscosité élongationnelle est définie en écoulement élongationnel par

$$\eta_e = \frac{\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}}{\varepsilon}$$

où ε est le taux d'élongation

Exemple de l'écoulement élongationnel simple



$$\begin{cases} u_x = \varepsilon x \\ u_y = -\varepsilon y / 2 \\ u_z = -\varepsilon z / 2 \end{cases}$$

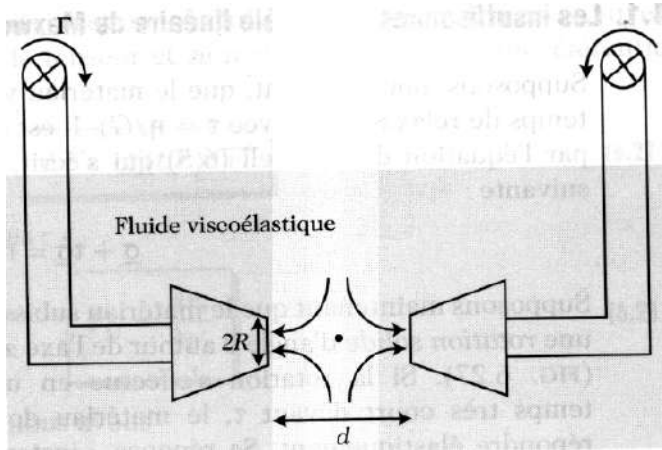
Dans le cas newtonien $\underline{\underline{\sigma'}} = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\eta\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\eta\varepsilon \end{pmatrix}$

et la viscosité élongationnelle est donc $\eta_e = 3\eta$ (loi de Trouton)

Dans le cas d'un fluide viscoélastique, la viscosité élongationnelle η_e peut être beaucoup plus grande (de plusieurs ordres de grandeurs) que la viscosité de cisaillement η .

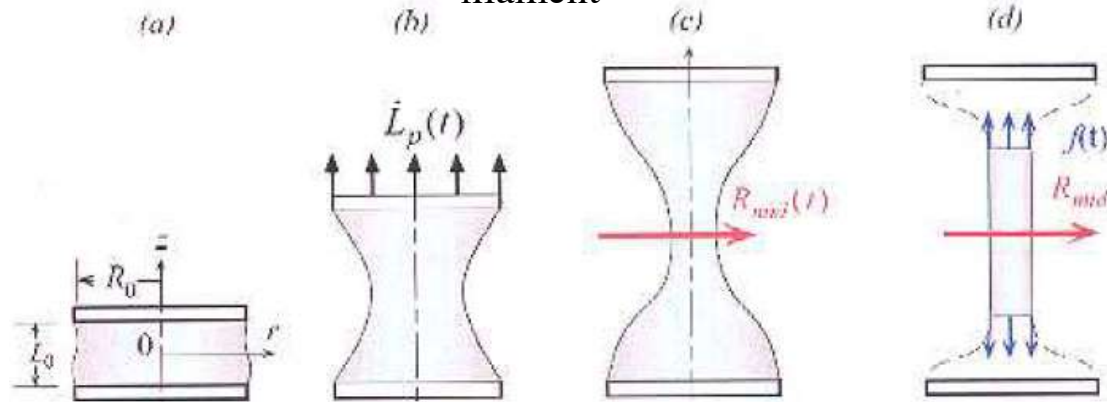
Mesure de la viscosité élongationnelle

Rhéomètre à « jets opposés »

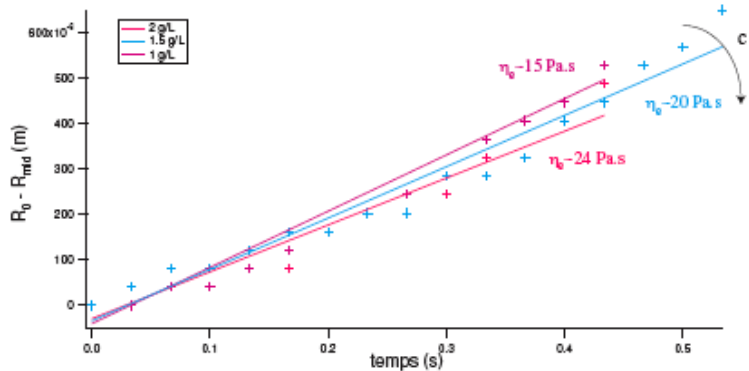


$$\eta_e \propto \Gamma$$

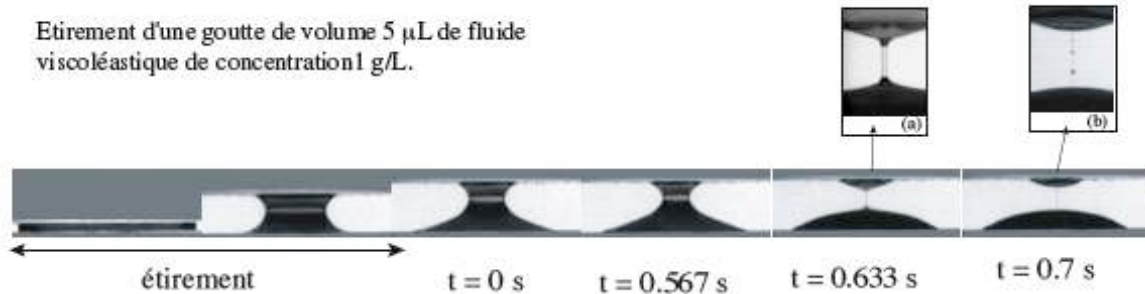
Élongation d'un filament



$$\eta_e = \frac{-\gamma}{2(dR/dt)}$$



Étirement d'une goutte de volume 5 μL de fluide viscoélastique de concentration 1 g/L.



Pour en savoir plus :

- P. Oswald, “Rhéophysique ou comment coule la matière” (Belin, 2005)
- R. B. Bird, R. C. Armstrong & O. Hassager, “Dynamics of polymeric liquids. Volume 1 : Fluid mechanics” (Wiley-Interscience, New York, 1981)

Chapitre 12 – Ondes dans les fluides

I. Ondes de surface



1. Ondes linéaires en eau profonde

Nous allons traiter ici des ondes à l'interface de deux fluides loin de toute paroi.

Ces ondes sont communément appelées “ondes en eau profonde”.

Nous allons également nous restreindre aux ondes linéaires, c'est-à-dire dont l'amplitude est faible A devant la longueur d'onde λ ($A \ll \lambda$, $Ak \ll 1$).

1.1 Relation de dispersion des ondes à l'interface de deux fluides

Considérons 2 fluides de masses volumique ρ_1 et ρ_2 séparés par une interface horizontale dans le champ de pesanteur \mathbf{g} .

Ces deux fluides ($i = 1, 2$) sont considérés non miscibles, de tension de surface γ , et l'écoulement est supposé incompressible ($\text{div}\mathbf{u}_i = 0$) et irrotationnel ($\text{rot}\mathbf{u}_i = 0$) dans chaque fluide.

Dans ces conditions, on peut définir un potentiel des vitesses qui satisfait à l'équation de Laplace.

$$\mathbf{u}_i = \nabla\phi_i \quad \text{avec} \quad \Delta\phi_i = 0$$

Recherchons l'existence d'ondes planes monochromatiques progressives.
La position de l'interface peut alors se mettre sous la forme

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp i(kx - \omega t)$$

d'amplitude ξ_0 , de nombre d'onde k et pulsation ω , et le potentiel des vitesses peut se mettre sous la forme

$$\phi_i(x, t) = f_i(z) \exp i(kx - \omega t)$$

L'équation de Laplace $\Delta \phi_i = 0$ implique alors l'équation différentielle suivante pour $f_i(z)$:

$$f_i'' - kf_i = 0$$

dont la solution générale est $f_i = A_i \exp(kz) + B_i \exp(-kz)$

En prenant en compte le fait que f_1 ne peut pas devenir infini quand $z \rightarrow -\infty$, et f_2 quand $z \rightarrow +\infty$, cela impose respectivement $B_1 = 0$ et $A_2 = 0$ et donc

$$f_1 = A_1 \exp(kz)$$

$$f_2 = B_2 \exp(-kz)$$

L'équation d'Euler doit être satisfaite dans chaque fluide

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \mathbf{g}$$

En considérant des ondes de petite amplitude (devant la longueur d'onde), le terme non-linéaire peut être négligé (devant le terme instationnaire). En effet

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right\| \sim \frac{\xi_0}{T^2} \qquad \left\| (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right\| \sim \frac{\xi_0}{T^2 \lambda}$$

$$\left\| (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right\| \ll \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right\| \qquad \text{si} \qquad \frac{\xi_0}{\lambda} \ll 1$$

L'écoulement dans chaque fluide doit alors satisfaire l'équation d'Euler linéarisée

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \mathbf{g}$$

En introduisant le potentiel de vitesse et le potentiel de pesanteur $-gz$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz \right) = 0$$

On a donc dans chaque fluide la relation de Bernoulli instationnaire linéarisée :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz = C_i$$

L'interface plane devant être solution impose $C_1 = C_2 = 0$ (car $\Delta p = 0$ à l'interface).

On a donc à la traversée de l'interface déformée

$$(p_1 - p_2)_\xi = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right)_\xi - \rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right)_\xi + (\rho_2 - \rho_1) g \xi$$

En considérant la condition cinématique de continuité de la vitesse à l'interface

$$(\mathbf{u}_1)_\xi = (\mathbf{u}_2)_\xi \quad (u_{1z})_{z \approx 0} \approx (u_{2z})_{z \approx 0} \quad \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)_{z \approx 0} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)_{z \approx 0} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

cela impose $A_1 k = -B_2 k = -i\omega \xi$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} \phi_1(x, z, t) = -i \frac{\omega}{k} \xi \exp(kz) \\ \phi_2(x, z, t) = i \frac{\omega}{k} \xi \exp(kz) \end{cases}$$

Le saut de pression à l'interface est alors

$$(p_1 - p_2)_\xi \approx \rho_2 \frac{\omega^2}{k} + \rho_1 \frac{\omega^2}{k} + (\rho_2 - \rho_1)g$$

En considérant la condition dynamique de saut de pression à l'interface donnée par la loi de Laplace :

$$(p_1 - p_2)_\xi \approx -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \gamma k^2 \xi$$

cela impose que

$$\rho_2 \frac{\omega^2}{k} + \rho_1 \frac{\omega^2}{k} + (\rho_2 - \rho_1)g = \gamma k^2 \xi$$

qui conduit à la relation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3$$

Dans cette relation de dispersion, on voit que si $\rho_1 > \rho_2$, alors ω est réel

Si $\rho_1 < \rho_2$, ω peut alors être complexe ($\omega = \omega_r + i \omega_i$) et l'interface peut ne pas être stable mais se déstabiliser avec le taux de croissance temporel ω_i .

Si $\rho_2 < \rho_1$, correspondant au cas d'un gaz au-dessus d'un liquide comme de l'air au-dessus de l'eau alors la relation de dispersion se simplifie en

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3$$

qui correspond donc à la relation de dispersion des ondes en eau profonde.

Dans cette relation apparaissent deux termes : un terme de gravité et un terme capillaire lié à la tension de surface. Gravité et capillarité sont les deux origines de propagation des ondes de surface.

En introduisant le nombre d'onde capillaire k_c correspondant à l'équilibre des deux termes

$$\omega^2 = gk \left[1 + \left(\frac{k}{k_c} \right) \right] \quad \text{avec} \quad k_c = \left(\frac{\rho g}{\gamma} \right)^{1/2} = \frac{1}{l_c}$$

où l_c est la longueur capillaire

Si $k \ll k_c$ ($\lambda \gg \lambda_c$), la relation de dispersion se réduit à

$$\omega^2 = gk$$

qui correspond aux **ondes de gravité** (grandes longueurs d'onde).

Ces ondes sont **dispersives**.

Leur vitesse de phase est
$$c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}$$

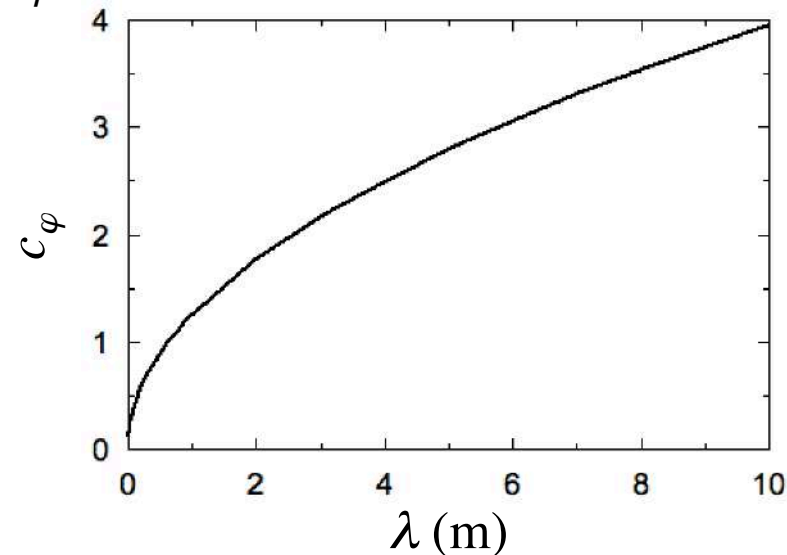
qui est d'autant plus grande que leur longueur d'onde λ est grande

Leur vitesse de groupe est
$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}(gk)^{1/2} = \frac{1}{2}c_\varphi$$

donc moins élevée que leur vitesse de phase.

A.N. pour l'eau

pour $\lambda = 10$ cm	$c_\varphi \approx 0,4$ m/s
pour $\lambda = 1$ m	$c_\varphi \approx 1,25$ m/s
pour $\lambda = 10$ m	$c_\varphi \approx 4$ m/s



Si $k \gg k_c$ ($\lambda \ll \lambda_c$), la relation de dispersion se réduit au contraire à

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3$$

qui correspond aux **ondes capillaires** (petites longueurs d'onde).

Ces ondes sont également **dispersives**.

Leur vitesse de phase est
$$c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma}{\rho} k \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right)^{1/2}$$

qui est d'autant plus grande que leur longueur d'onde λ est petite

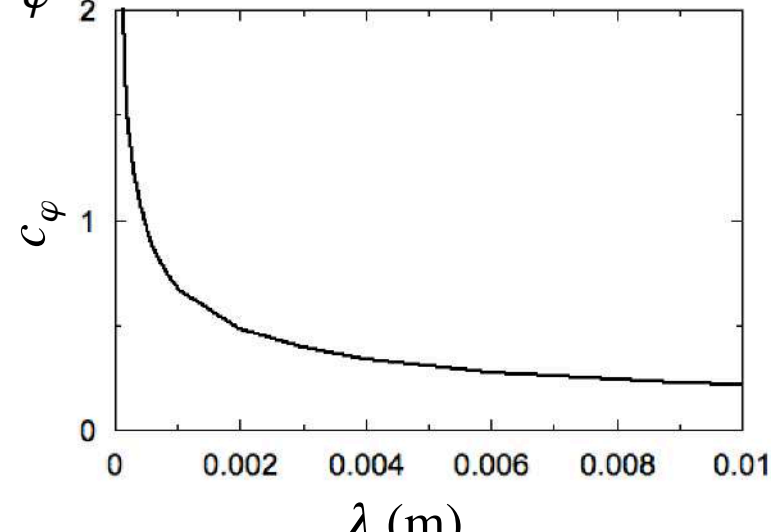
Leur vitesse de groupe est
$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho} k \right)^{1/2} = \frac{3}{2} c_\varphi$$

donc plus élevée que leur vitesse de phase.

A.N. pour l'eau

pour $\lambda = 1$ cm $c_\varphi = 0,2$ m/s

pour $\lambda = 1$ mm $c_\varphi = 0,7$ m/s

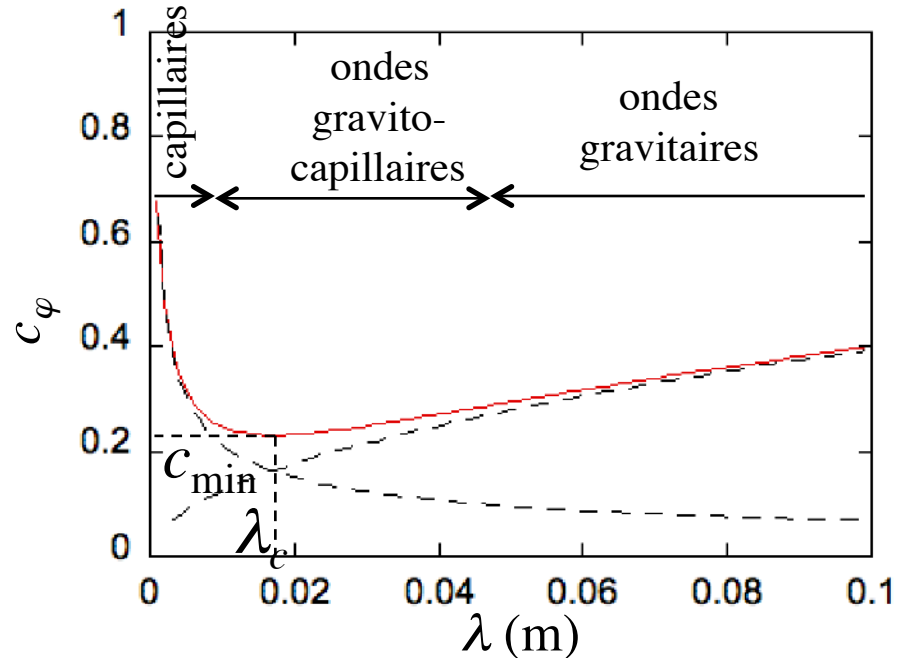


Dans le cas général (gravito-capillaire)

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3$$

la vitesse de phase $c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k \right)^{1/2}$ présente un minimum pour $k = k_c$

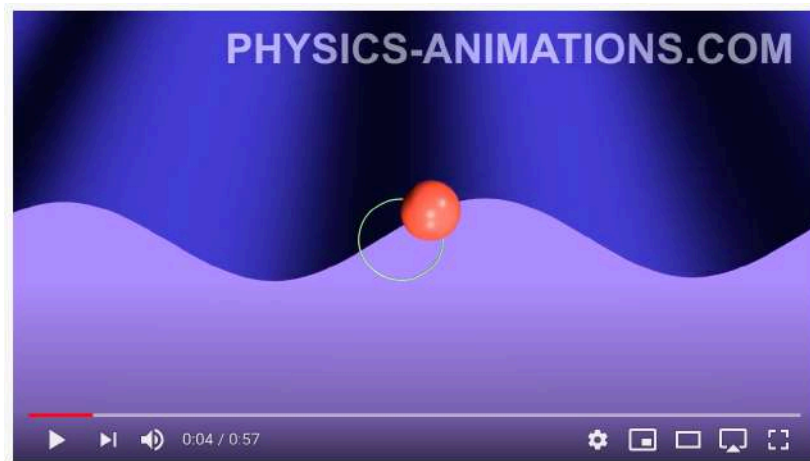
dont l'expression est $c_{\min} = 2^{1/2} \left(\frac{\gamma g}{\rho} \right)^{1/4}$ A.N. pour l'eau $c_{\min} \approx 0,23$ m/s



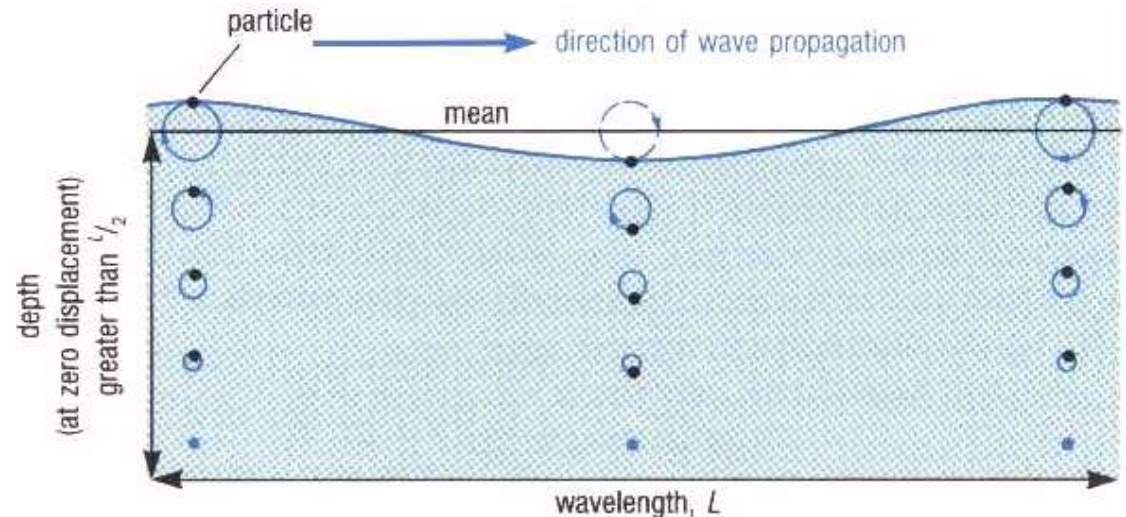
1.2 Trajectoires particulières

Pour trouver les trajectoires des particules fluides pendant une période, il faut intégrer en temps la vitesse de la particule en suivant son mouvement.

Dans la limite des très faibles amplitudes ($\xi_0 \ll \lambda$), on trouve facilement que ces trajectoires correspondent à des cercles de rayon $\xi_0 \exp(kz)$, qui sont donc d'autant plus petits qu'on est loin de la surface donc en profondeur ($z < 0$).



<https://www.youtube.com/watch?v=7yPTa8qi5X8>



Les ondes de surface en eau profondes sont donc des ondes ni longitudinales ni transverses.

Si on considère l'effet de l'amplitude (même faible), on peut montrer qu'il existe un courant de dérive en surface appelé "dérive de Stokes" proportionnelle à l'amplitude ξ_0 .

2. Ondes linéaires en eau peu profonde

Nous allons traiter ici des ondes à l'interface de deux fluides non loin de parois

Ces ondes sont communément appelées “ondes en eau peu profonde”.

Nous allons également nous restreindre aux ondes linéaires, c'est-à-dire dont l'amplitude est faible A devant la longueur d'onde λ ($A \ll \lambda$, $Ak \ll 1$).

1.1 Relation de dispersion des ondes à l'interface des deux fluides

La démarche pour obtenir la relation de dispersion est très similaire à celle adoptée précédemment, la seule différence résidant dans les conditions aux limites de vitesse nulle imposées par les parois proches et non pas à l'infini

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)_{z=-H} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)_{z=H} = 0$$

qui imposent

$$A_1 = B_2 e^{2kH} \qquad B_2 = A_2 e^{2kH}$$

et donc

$$f_1 = B_1 \left(e^{2kH} e^{kz} + e^{-kz} \right) \qquad f_2 = A_2 \left(e^{kz} + e^{2kH} e^{-kz} \right)$$

pour les dépendances suivant z du potentiel de vitesse $\phi_i(x, t) = f_i(z) \exp i(kx - \omega t)$

En considérant les conditions cinématique et dynamique à l'interface, on aboutit à la relation de dispersion générale :

$$\omega^2 = \left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3 \right] \tanh(kH)$$

Dans le cas où les parois infiniment loin ($kH \rightarrow +\infty$), $\tanh(kH) \rightarrow 1$ et on retrouve la relation de dispersion établie précédemment.

Dans le cas où les parois sont très proches loin ($kH \ll 1$), $\tanh(kH) \approx kH$ et la relation de dispersion devient alors

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gHk^2 + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} Hk^3$$

Dans le cas d'une interface liquide-gaz ($\rho_2 < \rho_1$), correspondant au cas d'un gaz au-dessus d'un liquide comme de l'air au-dessus de l'eau proche d'une paroi, la relation de dispersion se simplifie considérablement car ce sont seules les ondes de gravité qui sont à considérer car de plus grande longueur d'onde et donc plus affectées par la présence de la paroi :

$$\omega^2 = gHk^2$$

Ces ondes sont **non dispersives**.

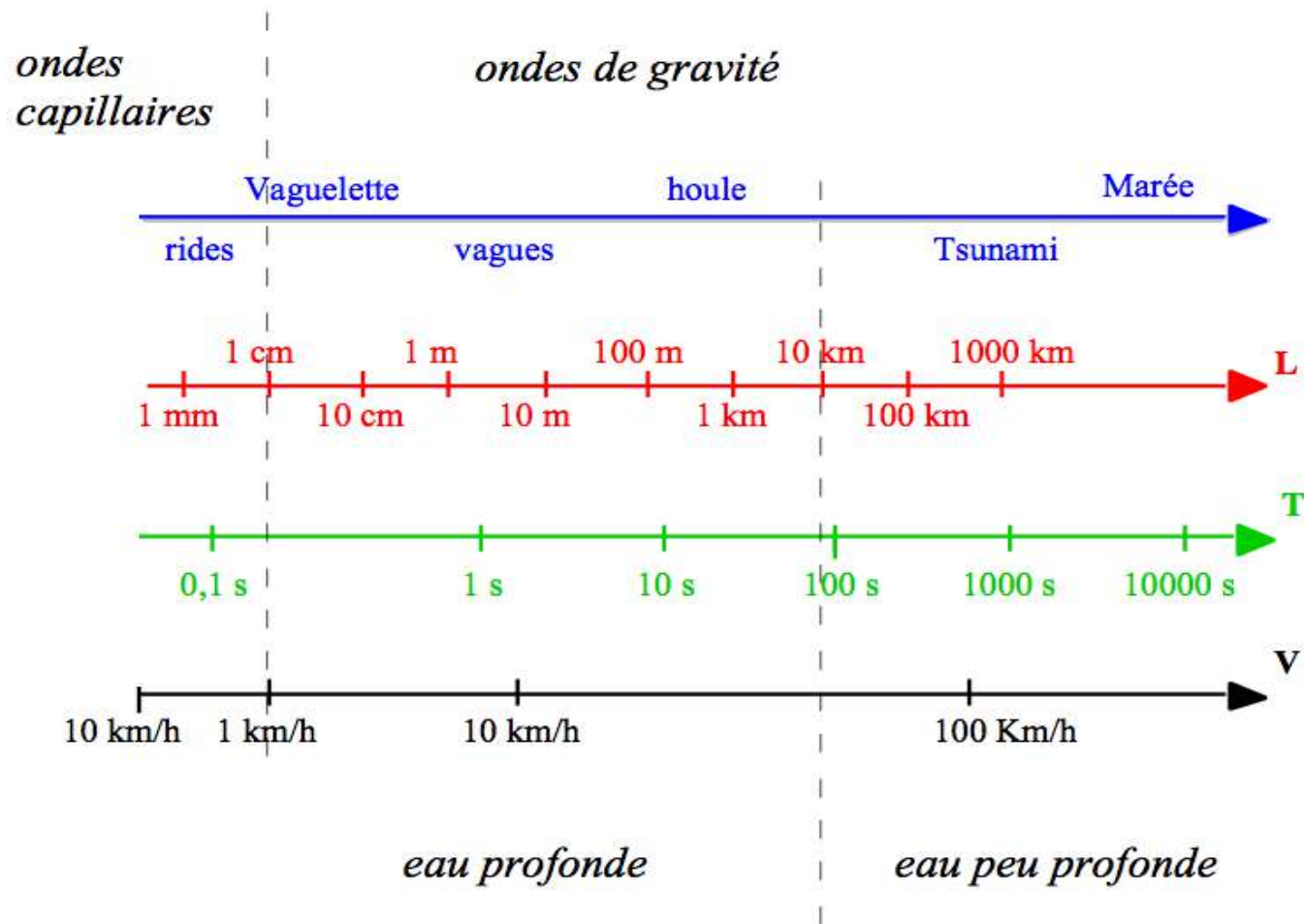
Leur vitesse de phase est $c_\varphi = \frac{\omega}{k} = (gH)^{1/2}$

qui est d'autant plus grande que l'eau est profonde

Leur vitesse de groupe est $c_g = \frac{d\omega}{dk} = (gH)^{1/2}$

identique à la vitesse de phase.

En résumé



Pourquoi les vagues arrivent toujours perpendiculairement à la plage ?





Ceci correspond donc à de la réfraction en eau peu profonde comme l'effet mirage en optique

Diffraction

$$\lambda \approx d$$

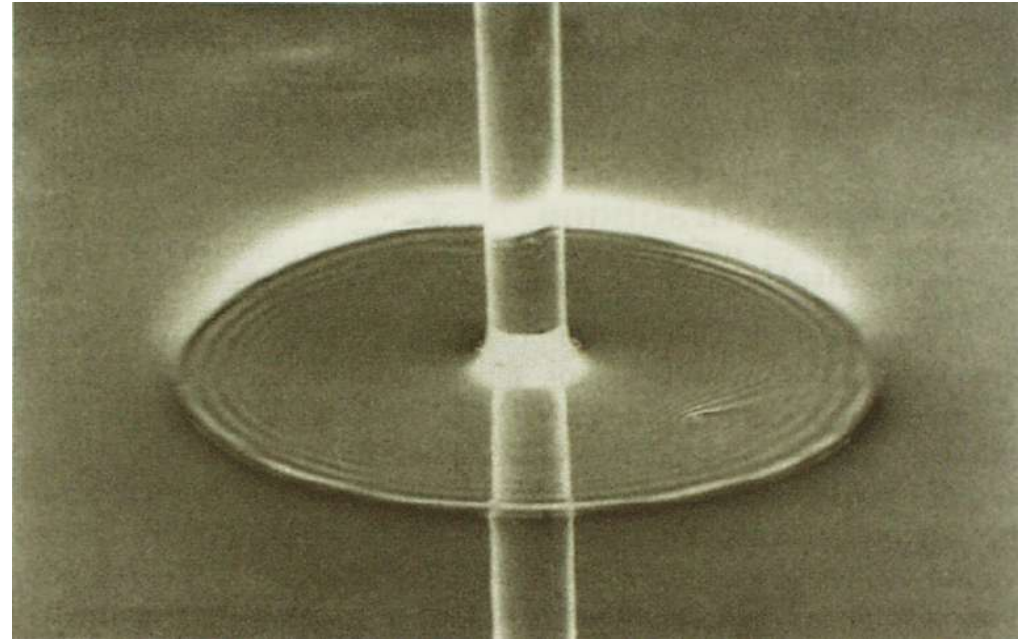


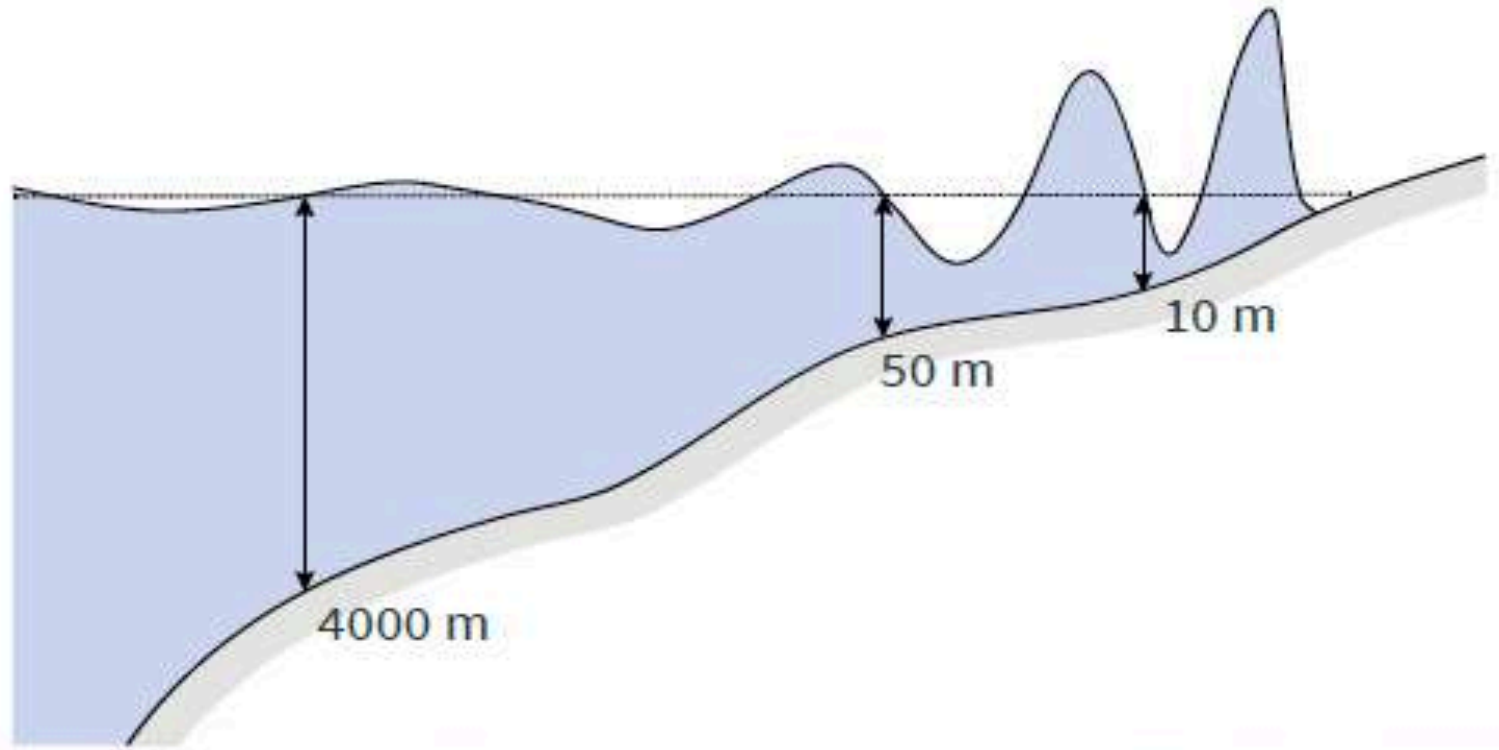
Port d'Alexandrie (Egypte)



Interférences par deux fentes (Principe de Huygens)









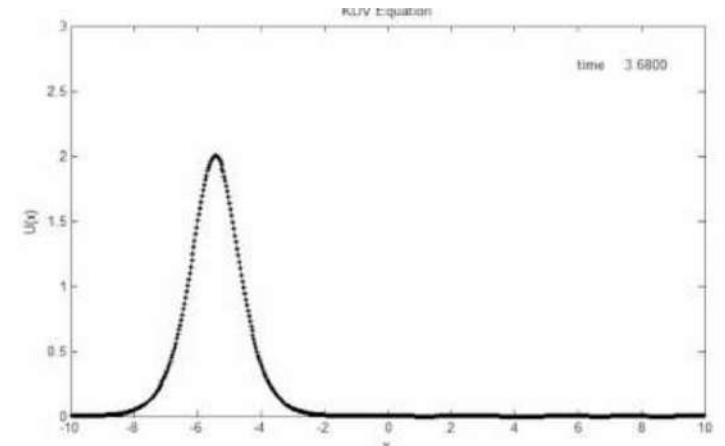
$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

$$\omega = c_0 \left(k - \frac{k^3 h^2}{6} \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3\eta}{2h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2h} \sqrt{\frac{3a}{h}} \left(x - c \left(1 + \frac{a}{2h} \right) t \right) \right]$$



Dissipation au cours de la propagation

par frottement interne dus à la viscosité du liquide
important aux petites longueurs d'ondes (rides)
faible aux grandes longueurs d'ondes (houle)

et frottements aux parois dus à la viscosité du liquide
d'autant plus important que la paroi est proche



λ (m)	L (m)	τ
1 mm	12 mm	0,01 s
1 cm	30 cm	1 s
1 m	23 km	3,5 heures
10 m	7500 km	14 jours
100 m	60 fois le tour de la Terre !	4 ans !

II. Ondes internes

Des ondes de gravité peuvent se propager à l'intérieur d'un fluide incompressible s'il est stratifié en densité, c'est-à-dire s'il présente en son sein un gradient de densité $\rho(z)$ ($d\rho/dz \neq 0$)

Ces ondes sont dite internes

1. Fluide stratifié et fréquence de Brünt-Väisälä

Considérons un fluide avec un gradient de densité constant. Ce peut-être le cas d'une densité évoluant linéairement ou exponentiellement.

Pour ce fluide au repos de pression p_0 $\frac{dp_0}{dz} = -\rho(z)g$

par unité de volume

Considérons une particule fluide (de taille petite par rapport aux variations de densité) de densité ρ_p . Cette particule est soumise à son poids et à la force d'Archimède résultante des forces de pression

$$\mathbf{f} = [\rho(z) - \rho_p] g \mathbf{e}_z \quad \text{par unité de volume}$$

Sa dynamique d'accélération verticale a_z est régie par la relation fondamentale de la dynamique (RFD) par unité de volume

$$\rho_p a_z = [\rho(z) - \rho_p] g$$

En considérant un déplacement δz de la particule fluide par rapport à sa position initiale de repos z_0 , la RFD s'écrit alors

$$\rho(z_0) \frac{\partial^2 \delta z}{\partial z^2} = [\rho(z_0 + \delta z) - \rho(z_0)] g$$

$$\frac{\partial^2 \delta z}{\partial z^2} = \frac{g}{\rho(z_0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{z_0} \delta z$$

$$\frac{\partial^2 \delta z}{\partial z^2} = -N^2 \delta z \quad \text{où} \quad N^2 = \frac{-g}{\rho(z_0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{z_0}$$

Ceci est l'équation différentielle correspondant au mouvement d'un oscillateur. La particule fluide oscille verticalement autour de sa position d'équilibre z_0 avec la fréquence

$$N = \left[\frac{-g}{\rho(z_0)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{z_0} \right]^{1/2}$$

appelée fréquence de Brünt-Väisälä
(météorologues gallois et finlandais)

Cela présage de l'existence d'ondes internes avec une fréquence $\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta$, où θ est l'angle que fait le nombre d'onde k par rapport à la verticale.

La propagation dépend donc de θ . On va voir que ces ondes sont très particulières.

2. Relation de dispersion des ondes internes

Considérons un fluide incompressible stratifié en densité, avec un gradient de densité $\rho_0(z)$ tel que

$$\frac{d\rho_0}{dz} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \text{cte}$$

Ceci correspond au profil exponentiellement décroissant avec l'altitude de l'atmosphère.

Pour ce fluide au repos de pression p_0 :

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0(z)g$$

Supposons maintenant que le fluide est légèrement perturbé par rapport à cet état de repos. Chaque élément conserve sa masse et son volume et donc sa densité (en supposant que la diffusion n'est pas assez rapide) et les équations à considérer pour un écoulement supposé incompressible et irrotationnel sont

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla p + \rho \mathbf{g}$$

équation d'Euler

$$\text{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0$$

équations de continuité
(conservation de la masse)

En considérant un mouvement bidimensionnel (2C2D) dans le plan (x,z) $\mathbf{u} \begin{cases} u_x(x,z,t) \\ 0 \\ u_z(x,z,t) \end{cases}$

avec des champs de pression et densité perturbé faiblement (p_1, ρ_1) par rapport à la situation de repos (p_0, ρ_0)

$$p(x,z,t) = p_0(z) + p_1(x,z,t) \qquad \rho(x,z,t) = \rho_0(z) + \rho_1(x,z,t)$$

Les équations d'Euler et de continuité linéarisées deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

En cherchant des solutions en ondes planes monochromatiques

$$u_x(x, z, t) = \hat{u}_x e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$u_z(x, z, t) = \hat{u}_z e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$p_1(x, z, t) = \hat{p}_1 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$\rho_1(x, z, t) = \hat{\rho}_1 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

Le système d'équations à résoudre devient

$$\begin{cases} \omega \rho_0 \hat{u}_x = k_x \hat{p}_1 \\ \omega \rho_0 \hat{u}_z = k_z \hat{p}_1 - \hat{\rho}_1 g \end{cases} \quad \begin{cases} k_x \hat{u}_{x1} + k_z \hat{u}_{z1} = 0 \\ -i\omega \hat{\rho}_1 + \hat{u}_{z1} k_z \rho'_0 = 0 \end{cases}$$

A noter que l'une de ces équations montre que la vitesse \mathbf{u} est perpendiculaire à \mathbf{k} , ce qui signifie que les ondes internes sont des ondes transverses de cisaillement.

La résolution de ces 4 équations à 4 inconnues conduit à la relation de dispersion

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta \quad \text{avec} \quad N^2 = -\frac{\rho_0'}{\rho_0} g \quad \text{fréquence de Brünt-Väisälä}$$

Cette relation de dispersion peut aussi s'écrire

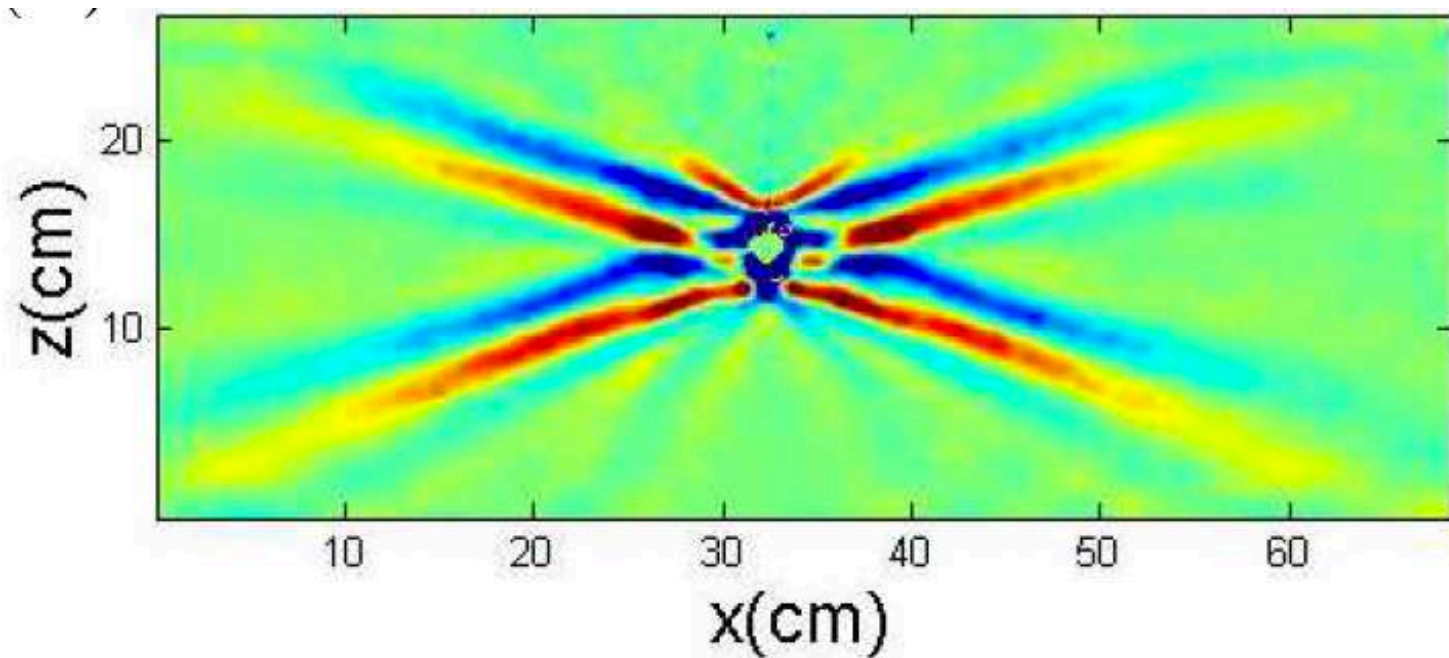
$$\omega = N |\sin \theta|$$

La vitesse de phase de ces ondes est $c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{N}{k_x^2 + k_z^2}$

Leur vitesse de groupe est $c_g = \begin{cases} \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{\omega k_z}{(k_x^2 + k_z^2) k_x} \times k_z \\ \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{\omega k_z}{(k_x^2 + k_z^2) k_x} \times (-k_x) \end{cases}$

La vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase!

Les ondes se propagent dans la direction (k_x, k_z) mais l'énergie se propage dans la direction $(k_z, -k_x)$.



Visualisation d'ondes internes issus de l'oscillation verticale d'une sphère dans de l'eau stratifiée par gradient de salinité ($d\rho/dz = 10^{-2} \text{ kg/m}^4$) par méthode Schlieren (Matthieu Mercier, thèse 2010)

III. Ondes acoustique dans les fluides

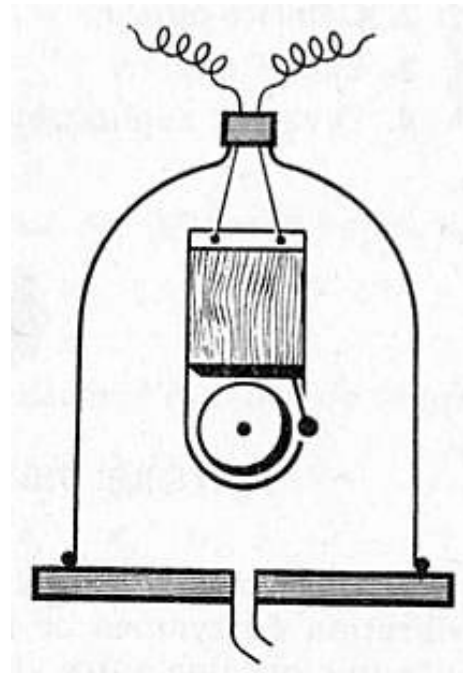
Les ondes acoustiques (dites sonores dans le domaine audibles) sont des ondes de pression et de densité. Elles ont besoin d'un support matériel pour se propager (\neq ondes EM) et se propagent par compressibilité (élasticité) de la matière.

Pour la propagation dans un fluide (liquide ou gaz), les 2 (3) grandeurs principales fluctuantes sont la pression et la vitesse (et la densité).

Trois équations sont à considérer : l'équations de Navier-Stokes (ou Euler), l'équation de continuité (conservation de la masse) et l'équation d'état.

On se restreindra ici à l'acoustique linéaire

“Le son ne se propage pas dans le vide” (Boyle, 1660)



Robert Boyle
(1627-1691)
physicien et chimiste
irlandais

1. Equation d'onde acoustique

Considérons un fluide au repos caractérisé par des champs de pression, masse volumique et température (p_0, ρ_0, T_0) indépendant de l'espace et du temps.

Considérons pour commencer les forces volumiques (gravité) et de dissipation (viscosité) négligeables.

Considérons également des ondes de faibles amplitudes ($\delta p \ll p_0, \delta \rho \ll \rho_0$).

Les champs de pression, masse volumique et vitesse perturbés sont alors

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$$

Il s'agit donc de résoudre 3 équations (éq. Euler, éq. de continuité, éq. d'état) à 3 inconnues (p, ρ, \mathbf{u}) . Cela peut se résoudre facilement si les équations sont linéaires. Il faut ainsi considérer les 3 équations linéarisées autour de l'état de base.

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit $\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_1$

L'équation de continuité linéarisée s'écrit $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$

L'équation d'état $p(\rho)$ linéarisée s'écrit $p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_1$

A noter que l'équation d'état linéarisée peut s'écrire $p_1 = c^2 \rho_1$ avec $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$

Si c^2 est réel, les oscillations de pression et de masse volumique sont en phase et c est la célérité des ondes acoustique

A noter que la dérivation peut-être isentropique (adiabatique réversible) ou isotherme,...

Il est d'usage d'introduire le coefficient de compressibilité (isentropique par exemple)

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad \text{et donc} \quad c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi} \quad \text{ou} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

La combinaison des équations d'Euler, de continuité et d'état linéarisées aboutit à l'équation d'onde de d'Alembert pour les perturbation de pression et densité :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p_1 = 0 \qquad \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho_1 = 0$$

Cette équation d'onde a été obtenue en négligeant le terme non linéaire et le terme de gravité dans l'équation d'Euler. Ces termes sont-ils bien négligeables ?

$$\|(\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i\| \sim kU^2 \qquad \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right\| \sim \omega U \qquad \|\rho_1 g\| \sim \rho_1 g \qquad \|\nabla p_1\| \sim kp_1$$

$$\|(\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i\| \ll \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right\| \qquad \|\rho_1 g\| \ll \|\nabla p_1\|$$

$$U \ll \frac{\omega}{k}$$

$$\rho_1 g \ll kp_1 \quad \text{avec} \quad p_1 = c^2 \rho_1$$

$$U \ll c$$

$$\lambda \ll \frac{c^2}{g} \quad \text{avec} \quad f \ll \frac{g}{c}$$

Ces conditions sont bien vérifiées dans les situations standards

2. Célérité des ondes acoustiques dans les gaz

Considérons un gaz parfait d'équation d'état $pV_m = RT$

$$p = \frac{RT}{M} \rho \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{M}{V_m}$$

Supposons que le passage d'une onde acoustique corresponde à un processus isotherme

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \text{et donc} \quad c = \left(\frac{RT}{M} \right)^{1/2}$$

Ceci conduit à $c \approx 290$ m/s pour l'air, ce qui est significativement plus bas que la valeur trouvée expérimentalement.

Considérons maintenant un processus adiabatique avec $pV_m^\gamma = cte$

$$\frac{\partial p}{p} = -\gamma \frac{\partial V}{V} = \gamma \frac{\partial \rho}{\rho} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{RT}{M} \quad \text{et donc} \quad c = \left(\frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2}$$

Ceci conduit à $c \approx 340$ m/s pour l'air, ce qui est proche de la valeur trouvée expérimentalement. Le processus est donc plus adiabatique qu'isotherme.

La vitesse du son ne dépend pas de la fréquence : les ondes sonores ne sont pas dispersives (heureusement pour les auditeurs dans les salles de concerts!)

La vitesse du son dépend de la température : c augmente avec T

(Ceci est source de problèmes de justesse pour les instruments à vents)

La vitesse du son ne dépend pas de la pression

La vitesse du son dépend du gaz : elle est d'autant plus grande que le gaz est léger (par exemple pour l'hélium beaucoup plus léger que l'air, ou pour de l'air humide légèrement plus léger que de l'air sec)

3. Puissance et énergie acoustique

3.1 Puissance acoustique

La puissance acoustique est $\vec{\pi}_a = p_1 \vec{u}$

Elle représente la puissance (travail par unité de temps) des forces de pression (par unité de surface).

C'est un vecteur analogue au vecteur de Poynting en électromagnétisme : elle est dirigée dans la direction de la propagation et caractérise le flux d'énergie.

Elle s'exprime en W/m^2

3.2 Conservation de l'énergie acoustique

La dissipation étant négligée, l'énergie acoustique doit se conserver :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V e dV = 0 \quad \text{où } e \text{ est la densité local d'énergie acoustique}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V e dV = - \iint_S p_1 \vec{u} \cdot dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = - \iint_S \vec{\pi}_a \cdot dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\pi}_a) dV$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{\pi}_a)$$

3.3 Densité d'énergie acoustique

D'après l'équation de conservation de l'énergie établie ci-dessus, la densité d'énergie apparaît comme composée de deux termes

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{\pi}_a) \quad \text{avec} \quad \vec{\pi}_a = p_1 \vec{u}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -p_1 \operatorname{div} \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p_1$$

D'après l'équation de continuité linéarisée

$$\operatorname{div} \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \frac{p_1}{c^2}$$

D'après l'équation d'Euler linéarisée

$$\rho_0 \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla p_1 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial u^2}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla p_1$$

La densité d'énergie acoustique s'exprime alors comme

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} + \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial u^2}{\partial t}$$

c'est-à-dire la somme de deux termes correspondant aux énergie potentielle et cinétique.

3.4 Pression acoustique

Comme la pression dépend du temps, on définit la pression acoustique comme la pression efficace

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p_1 dt}$$

où T est la période pour un signal périodique ou un temps long pour un signal quelconque

3.5 Niveau sonore

Compte tenu de la sensibilité de l'oreille de type logarithmique (Fechner, 1850) avec un minimum audible correspondant à $p_{\min} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa à la fréquence de 1 kHz, le niveau sonore est défini tel que

$$N_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{p_a}{p_{\min}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{p_{eff}}{p_{\min}} \right)$$

Source	Puissance acoustique
Voix normale	0,01 mW = 0,00001 W = $1 \cdot 10^{-5}$ W
Voix forte	0,1 mW = 0,0001 W = $1 \cdot 10^{-4}$ W
Voix criée	1 mW = 0,001 W = $1 \cdot 10^{-3}$ W
Haut-parleur	1 W
Avion	1 kW = 1000 W = $1 \cdot 10^3$ W



sonomètre



Félix Savart
(1791-1841)
Médecin-chirurgien
Physicien

Niveau (dB)	Exemple de source
	Tic-tac d'une montre à plusieurs mètres
0	Seuil d'audition
10	Chambre sourde
20	Bruit de fond naturel dans le silence
30	Studio d'enregistrement
40	Campagne calme
60	Voix normale
70	Bureau calme
80	Orchestre symphonique
90	Voix criée
110	Sirène des pompiers
120	Seuil de douleur
140	Formule 1
150	Avion à réaction
170	Explosion

4. Transmission, réflexion, atténuation des ondes acoustiques

4.1 Impédance acoustique

L'*impédance acoustique*, notée Z , est une quantité qui va permettre de caractériser la transmission et la réflexion des ondes acoustiques à travers une interface

$$Z = \frac{p_1}{\vec{u} \cdot \vec{n}} \quad \text{où } \mathbf{n} \text{ est la normale à l'interface}$$

L'impédance acoustique s'exprime en $\text{kg/m}^2/\text{s}$.

Cette définition correspond à l'impédance acoustique spécifique, mais il existe d'autres définitions pour la propagation dans des conduits acoustiques notamment (impédance acoustique *ramenée*).

Pour une onde plane progressive monochromatique suivant x avec $p_1 = \rho_0 c u$

$$Z = \rho_0 c \quad (Z = -\rho_0 c \text{ pour une onde suivant } -x)$$

et la pression acoustique s'écrit $p_1 = \rho_0 u$

L'impédance acoustique d'un solide et d'un liquide est beaucoup plus grande que celle d'un gaz

4.1 Réflexion et transmission à une interface

A la traversée d'une interface séparant un milieu 1 d'un milieu 2, les coefficients de réflexion R et transmission T de la puissance acoustique et donc de l'énergie sont

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

En l'absence de dissipation prise en compte ici, $R + T = 1$ qui correspond bien à une conservation de l'énergie.

A une interface air/eau avec $Z_{\text{air}} = 440$ et $Z_{\text{eau}} = 1,5 \cdot 10^6$: $R = 0,9994$ et $T = 0,0006$!

4.2 Atténuation des ondes acoustiques

L'atténuation des ondes acoustiques à plusieurs origines possibles :

- décroissance géométrique par exemple dans la propagation à partir d'une source ponctuelle
- absorption aux parois
- dissipation en volume

Cette dissipation en volume est liée à la viscosité du fluide, correspondant non seulement à la viscosité de cisaillement η mais aussi à la seconde viscosité de volume ζ

L'équation du mouvement linéarisée pour un fluide compressible est

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u})$$

En introduisant le temps d'atténuation τ ,

$$\left\| \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} \right\| \sim \rho_0 \frac{U}{\tau}$$
$$\left\| \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) \right\| \sim \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{U}{\lambda^2}$$

donc $\tau \sim \frac{\rho_0 \lambda^2}{\zeta + \frac{1}{3} \eta}$

L'atténuation est d'autant plus importante que la longueur d'onde (fréquence) est courte (élevée)



Chapitre XIII

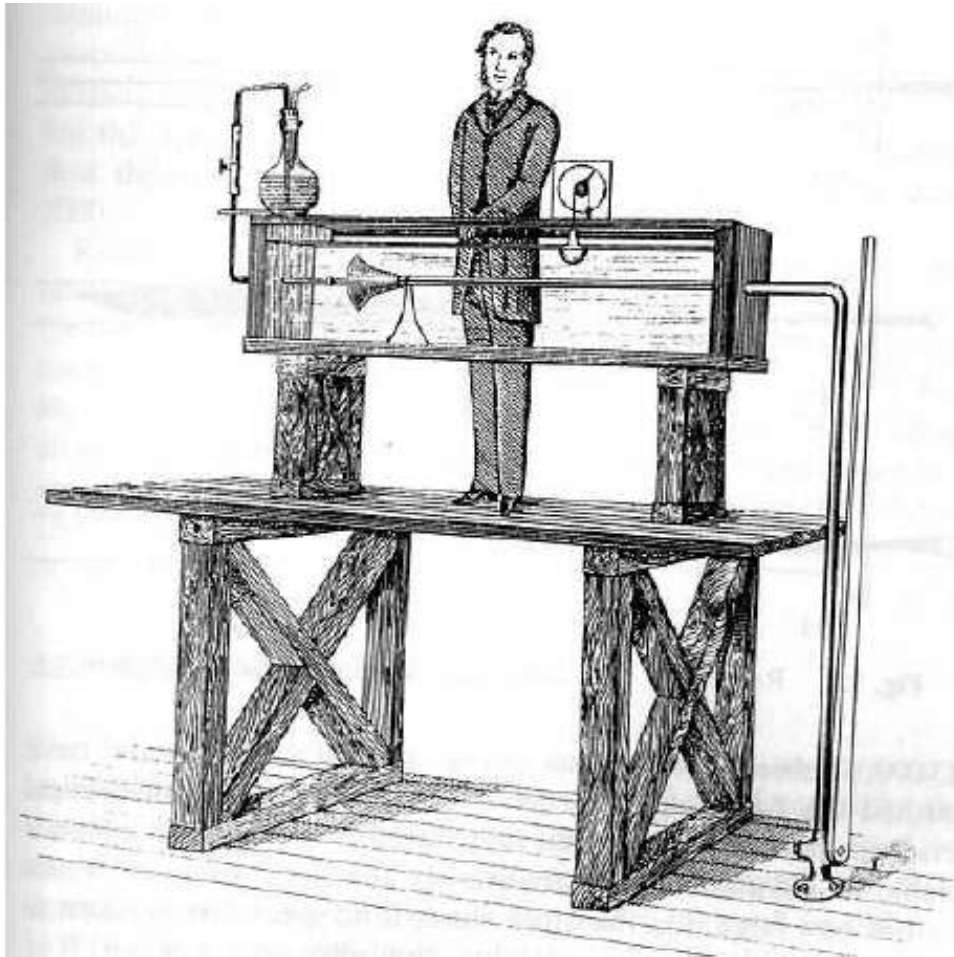
Eléments d'instabilités et de turbulence

Notion d'**instabilité** : un écoulement est *instable* si sa structure change par l'effet de l'augmentation d'un paramètre de contrôle (par exemple le débit imposé ou une différence de température) ou d'une perturbation extérieure ("bruit")

Notion de **turbulence** : un écoulement est *turbulent* si sa vitesse locale n'est pas constante et fluctue au cours du temps de manière non périodique

écoulement turbulent \neq écoulement laminaire

Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube



Expérience historique d'Osborne Reynolds
(1883, Manchester)
sur la transition laminaire-turbulent



Transition laminaire-turbulent en tube

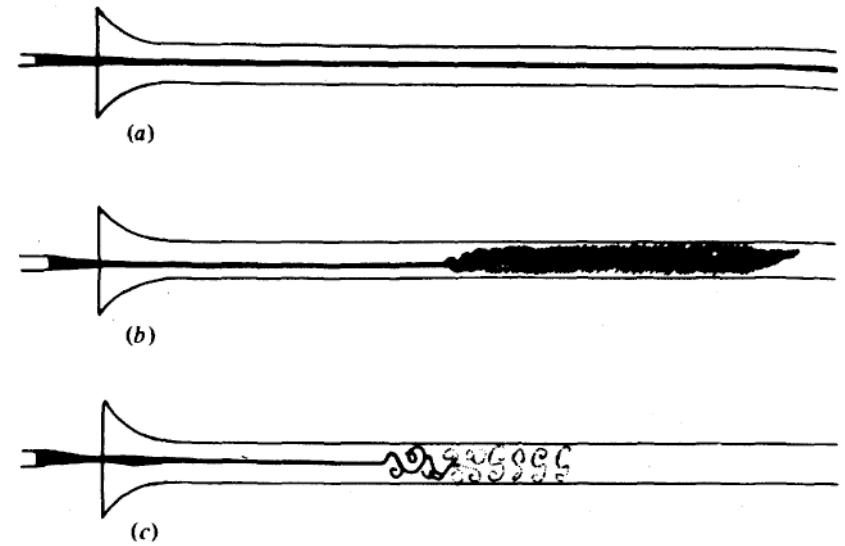
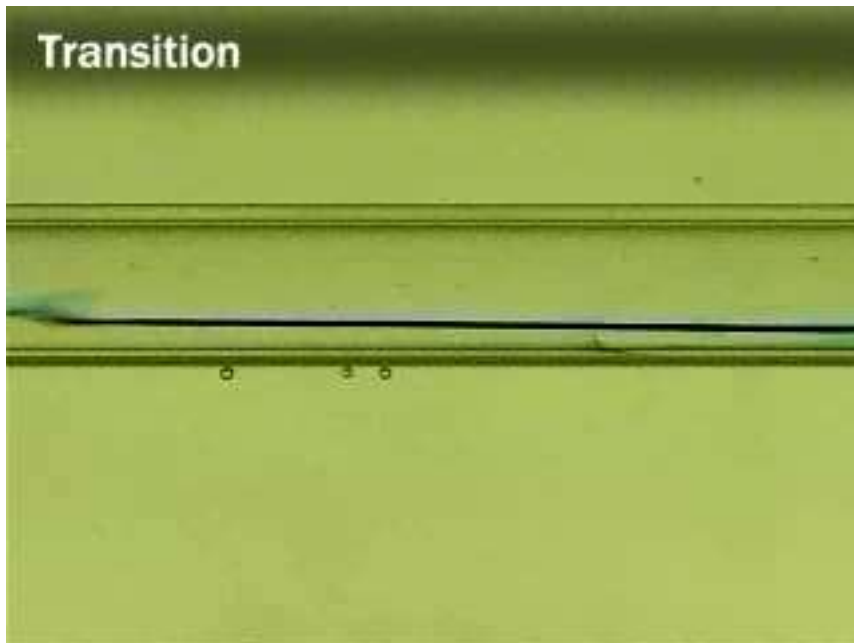
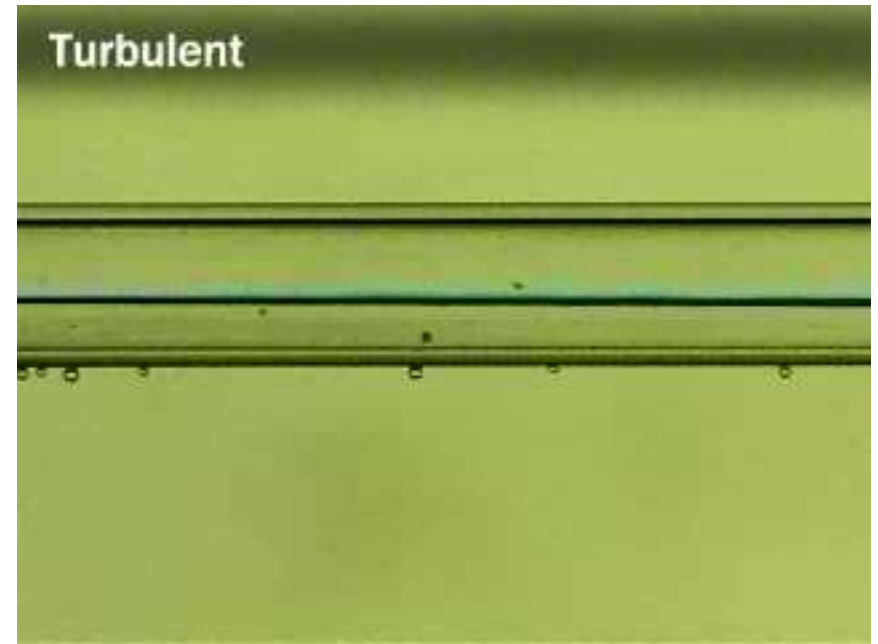
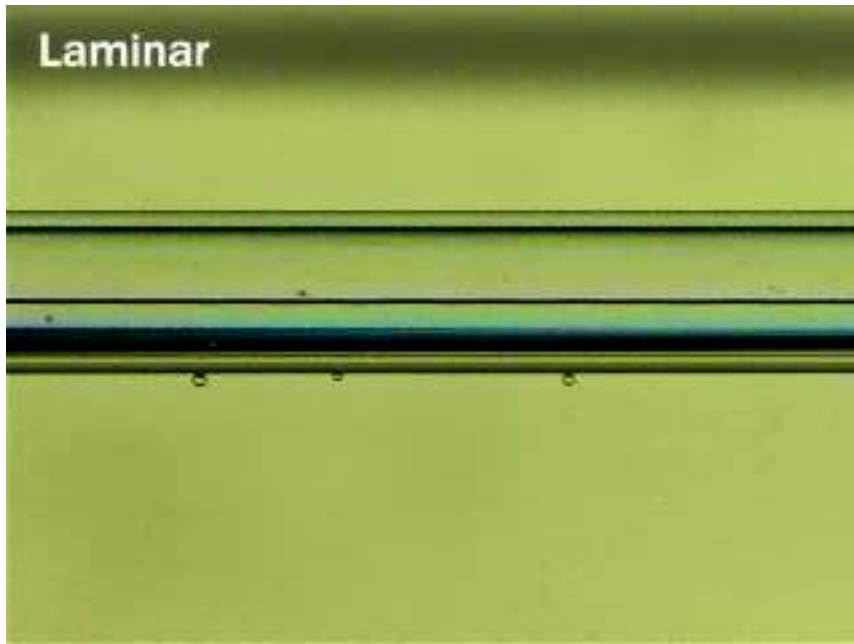
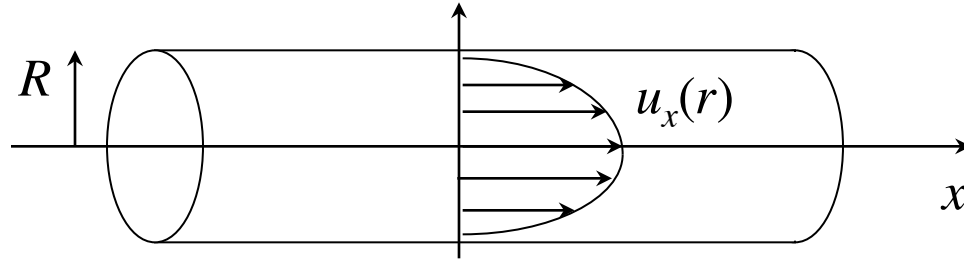


Fig. 9.2. Reynolds's drawings of the flow in his dye experiment.

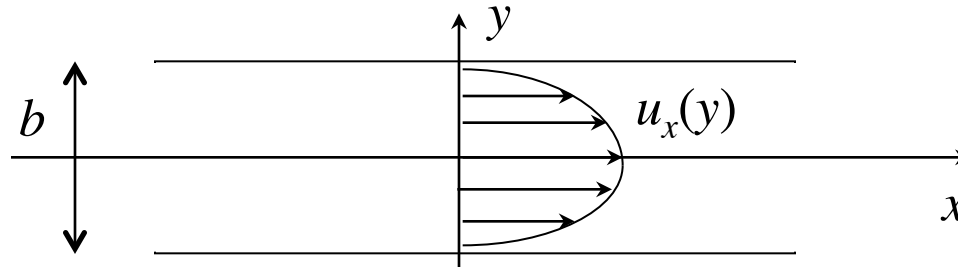
Instabilité de l'écoulement de Poiseuille cylindrique



Écoulement linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re = +\infty$,
expérimentalement jusqu'à $Re \approx 2600$ (sans précautions particulières)
ou même 10^5 (avec de très grandes précautions) !

Non linéairement instable à $Re \approx 2600$

Instabilité de l'écoulement de Poiseuille plan



Écoulement linéairement stable théoriquement jusqu'à $Re_c = 5772$,
expérimentalement jusqu'à $Re_c \approx 3000$ (sans précautions particulières)
voire 5500 (avec de grandes précautions)

Non linéairement instable à $Re_c \approx 2900$

Instabilité l'écoulement de Couette plan

Linéairement stable jusqu'à $Re = +\infty$ (résultat issu d'une analyse de stabilité linéaire

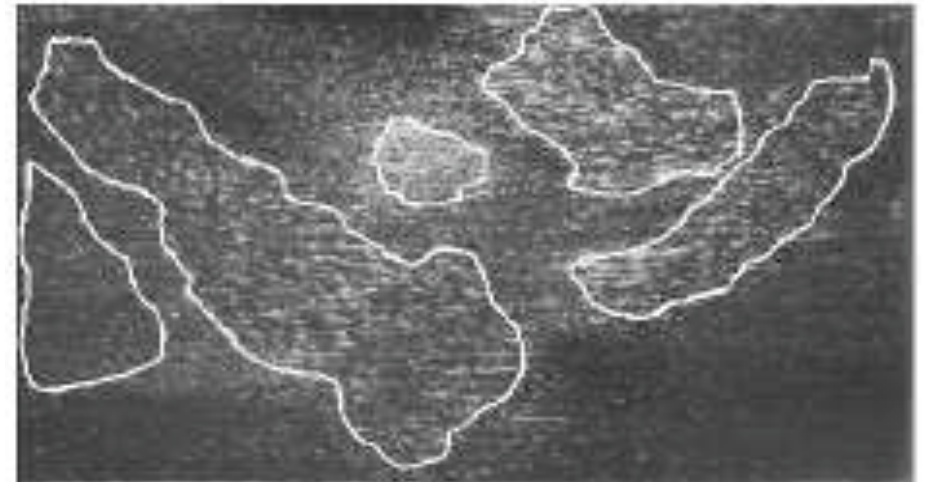
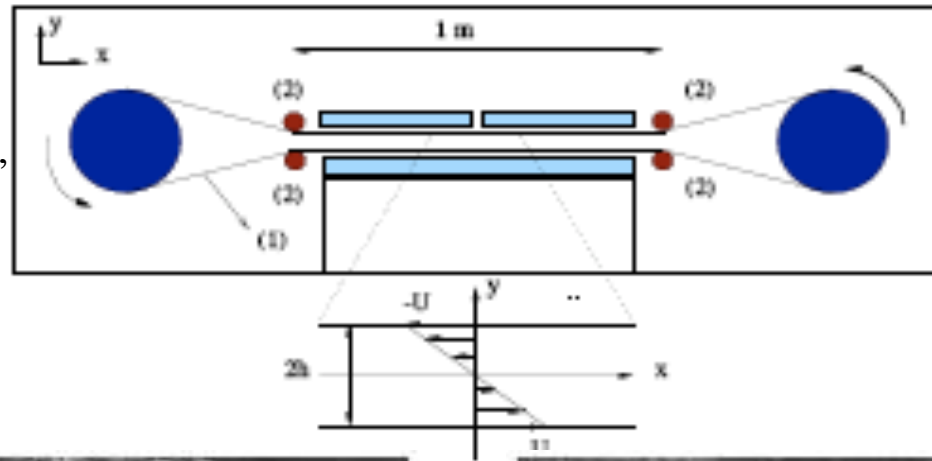
$$u = u_0 + A \cos(kx - \omega t) \quad \text{avec perturbation de vitesse } A \text{ infiniment petite}$$

Et non-linéairement (A non infiniment petit) ?

Transition vers la turbulence par intermittence spatio-temporelle

Expériences

F. Daviaud, O. Dauchot, S. Bottin,
P. Manneville (CEA Saclay)
1990-2000
R. Monchaud et al. (ENSTA)
2010-2020



$Re \sim 325$

Transition vers la turbulence par spots turbulents

Simulations numériques
($Re = 250$)

P. Manneville (Ladhyx) 2007

Barkley & Tuckerman (LIMSI-PMMH) 2007

Y. Duguet (LIMSI) 2015-2020

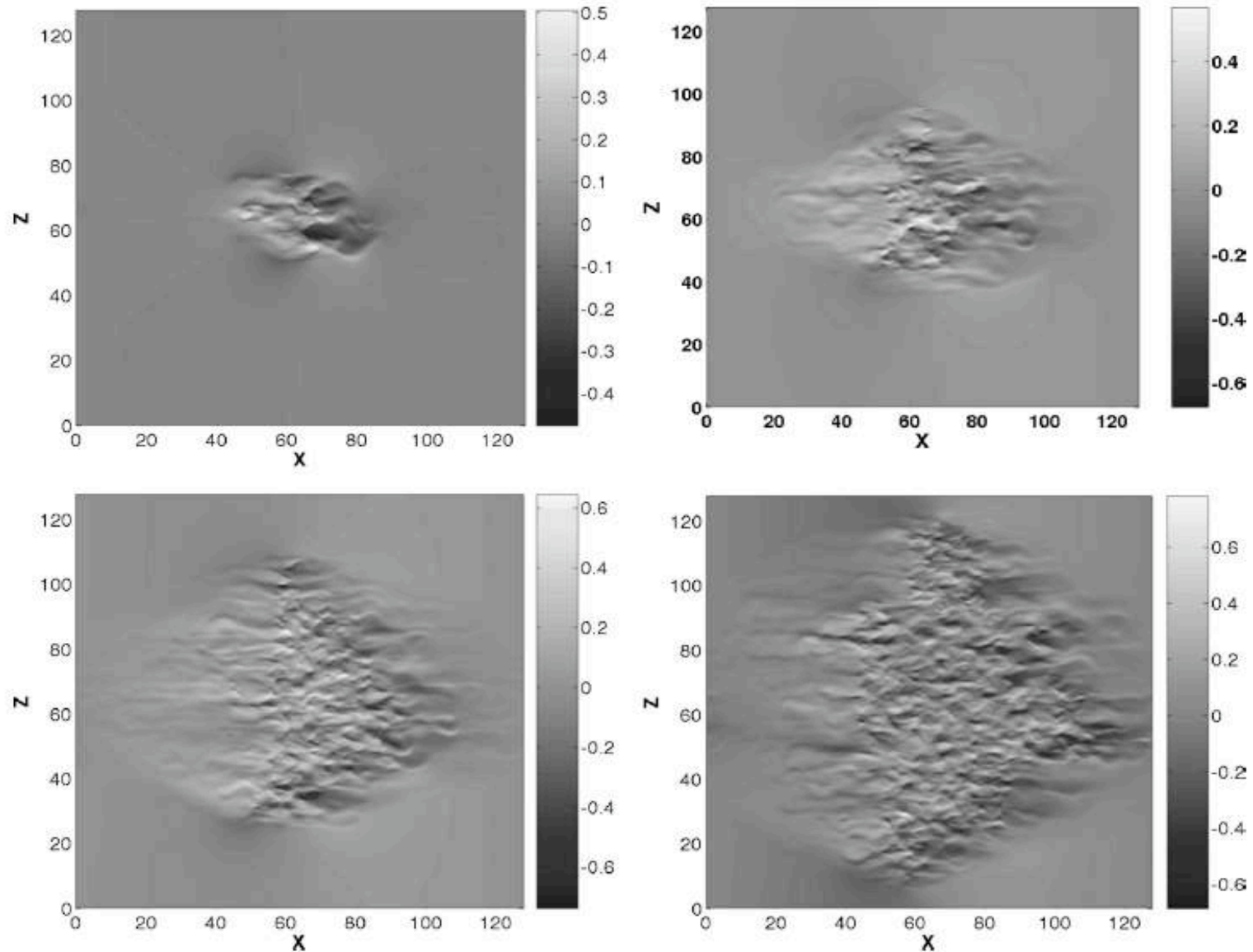
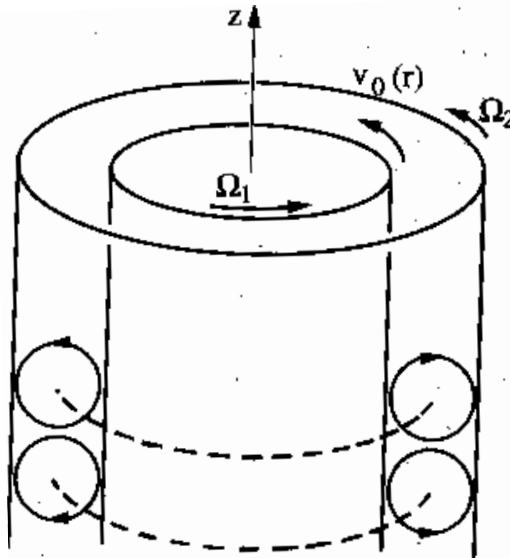


FIG. 1. Growth of a turbulent spot at $R=250$ in a wide domain ($L_x \times L_z = 128 \times 128$). Field of amplitude $U_0(x, z, t)$ in gray levels at $t=50, 150, 250$, and 350 (from left to right and top to bottom). The whole domain becomes uniformly turbulent at $t \approx 700$.

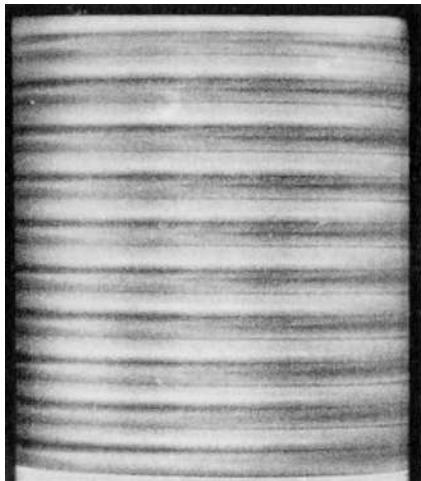
Instabilité de l'écoulement de Couette cylindrique dite instabilité de Taylor-Couette (1923)

L'écoulement de Couette en géométrie cylindrique est instable pour $Re > Re_c$

$$Re_c = \frac{41}{\sqrt{R_2 / R_1 - 1}}$$



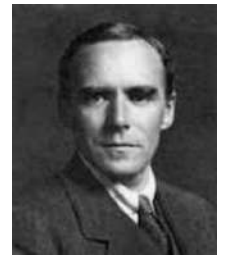
rouleaux de Taylor-Couette
(contrarotatifs)



rouleaux stationnaires



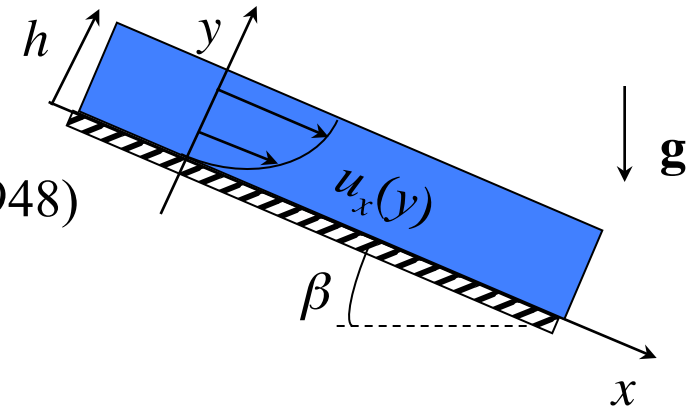
ondulation des rouleaux
(instabilité secondaire)



G. I. Taylor
1886-1975

Instabilité d'un film liquide en écoulement sur une paroi

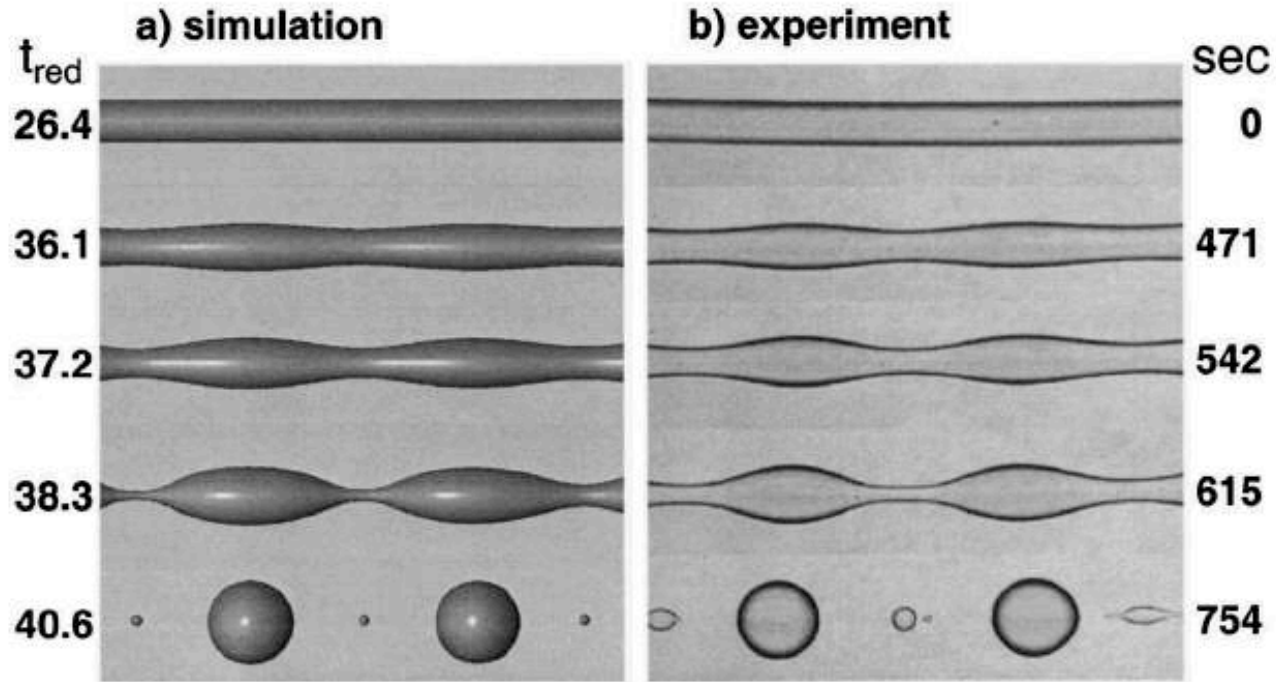
L'écoulement d'un film sur un plan incliné d'un angle β est stable jusqu'à $Re_c = \frac{5}{4 \tan \beta}$ (Kapitza, 1948)



Sur une paroi verticale ($\beta = 90^\circ$), il n'est donc jamais stable

ruissellement dans la rue de la Colline (Orsay)
un jour de pluie

Instabilité d'un cylindre liquide dite instabilité de *Rayleigh-Plateau*



instabilité de jet

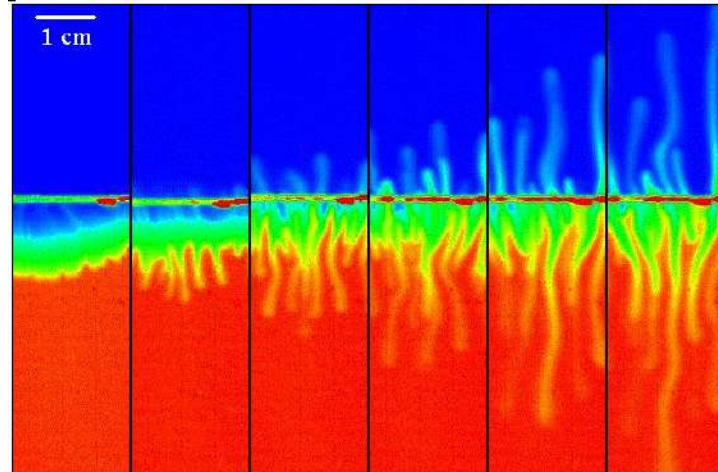
Exemple : robinet,
imprimante à jet d'encre

Rosée sur une toile d'araignée

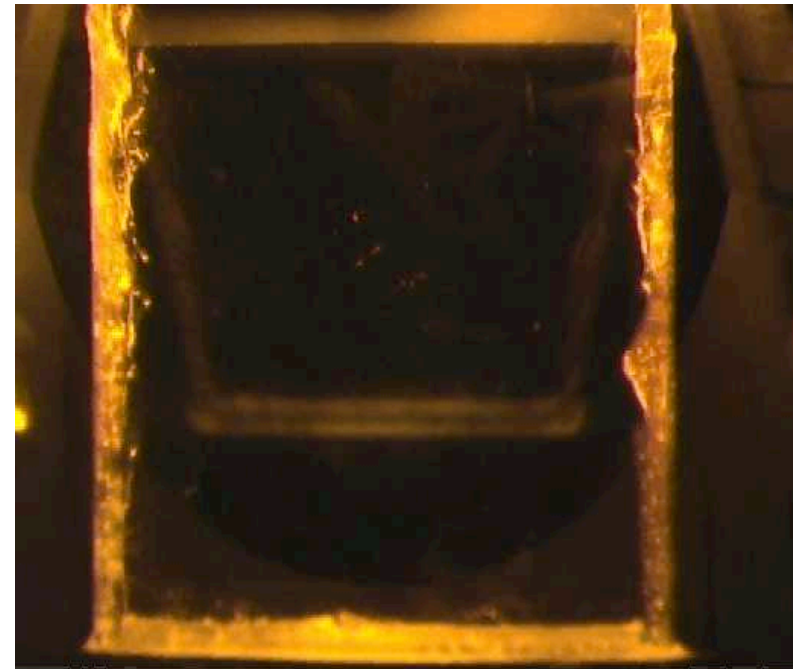


Instabilité de Rayleigh-Taylor (1883)

L'interface entre 2 fluides se déstabilise lorsque le plus dense est au dessus du moins dense :
ondulation de l'interface et digitations



eau salée
eau sucrée



chloroforme
eau - MnCl_2
(sel paramagnétique)

expériences
P. Carlès et al.
Labo. FAST
2006-2009



Instabilité de Kelvin-Helmholtz

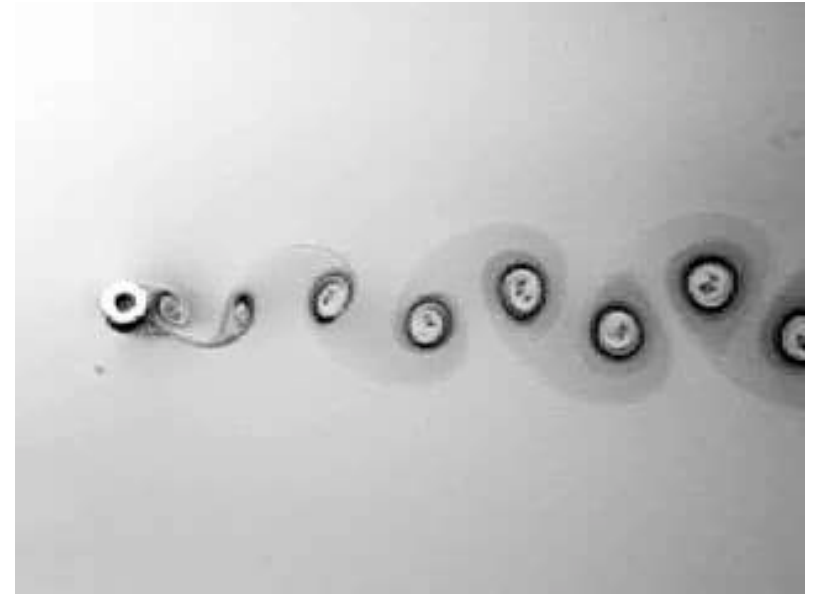
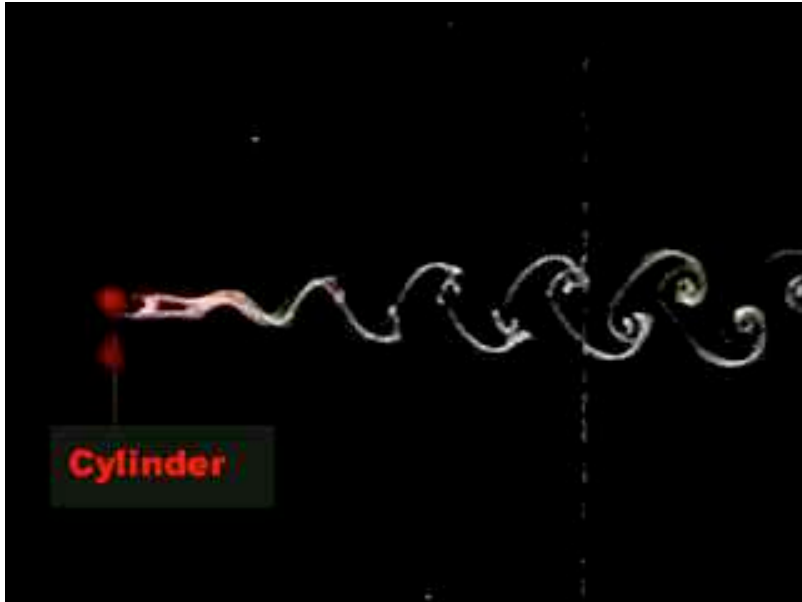
C'est l'instabilité de cisaillement qui intervient à l'interface de deux couches de fluides en mouvement parallèle relatif



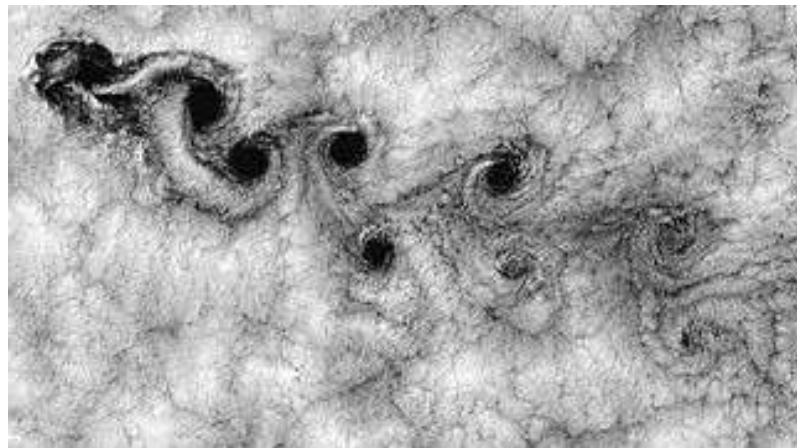
Cas liquide-gaz entre deux plaques très proches

Instabilité du sillage d'un cylindre

Au-dessus d'une vitesse critique ($Re_c = 50$), l'écoulement derrière un cylindre se déstabilise pour former une suite de tourbillons alternés dite *allée de Bénard-von Karman*



dans un film de savon

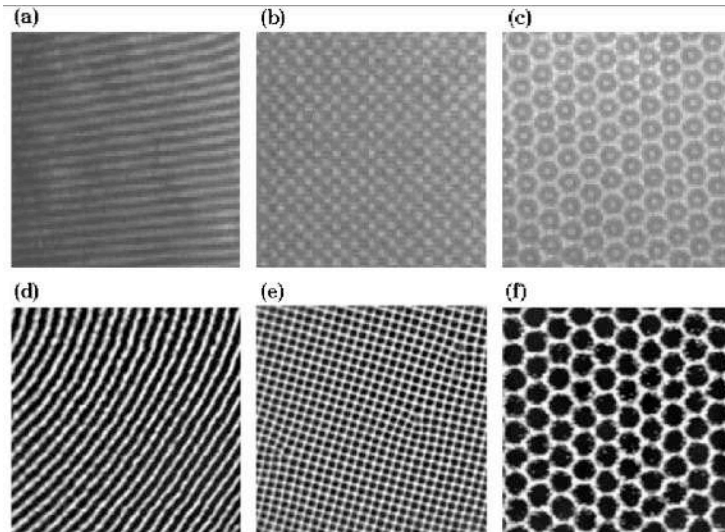
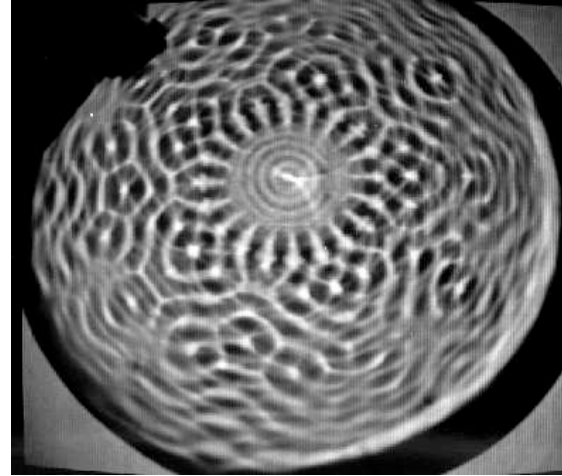
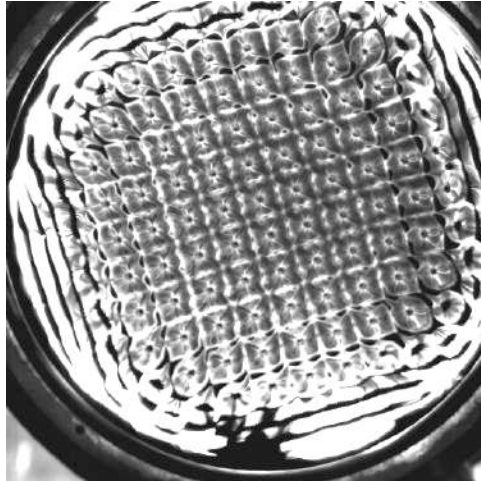


derrière une île

Instabilité de Faraday (1831)

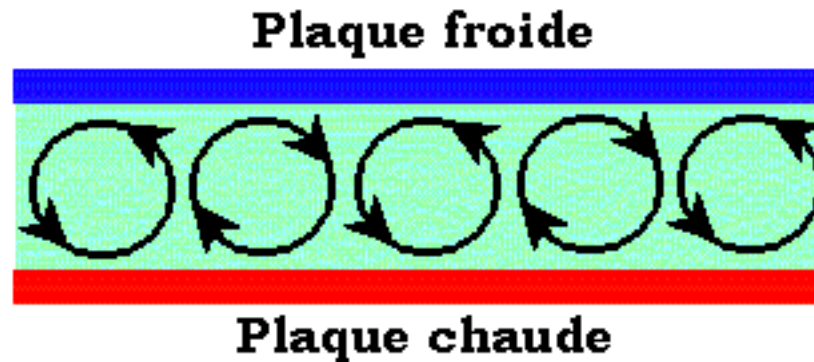
Au-dessus d'une certaine accélération, la surface d'une couche de fluide se déstabilise lorsqu'elle est vibrée verticalement

instabilité
paramétrique



Instabilité de Rayleigh-Bénard (1910)

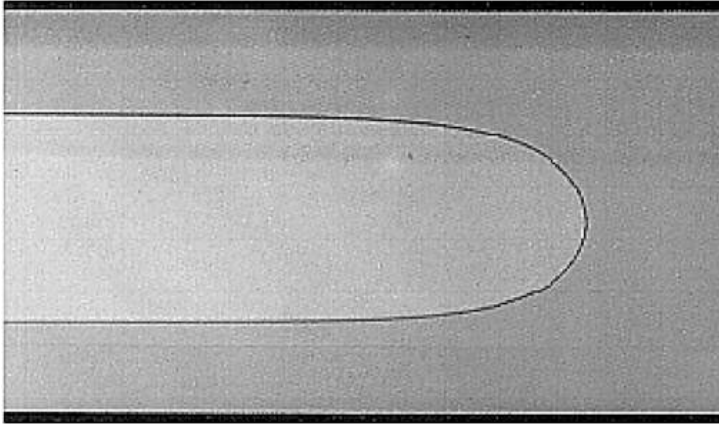
Au delà d'une différence de température critique, une couche de fluide chauffée par le bas se déstabilise et un écoulement apparaît sous forme de rouleaux dits de convection



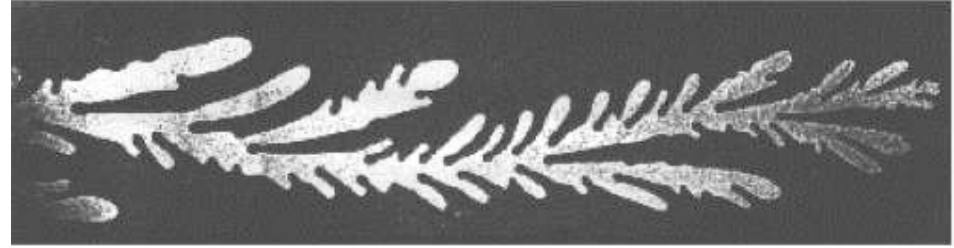
Applications: convection géophysique (atmosphère et manteau terrestre)
mélange

Instabilité de Saffman-Taylor (1958)

l'interface entre 2 fluides se déstabilise lorsque le moins visqueux pousse le plus visqueux :
formation d'un seul ou plusieurs doigts, simples ou ramifiés



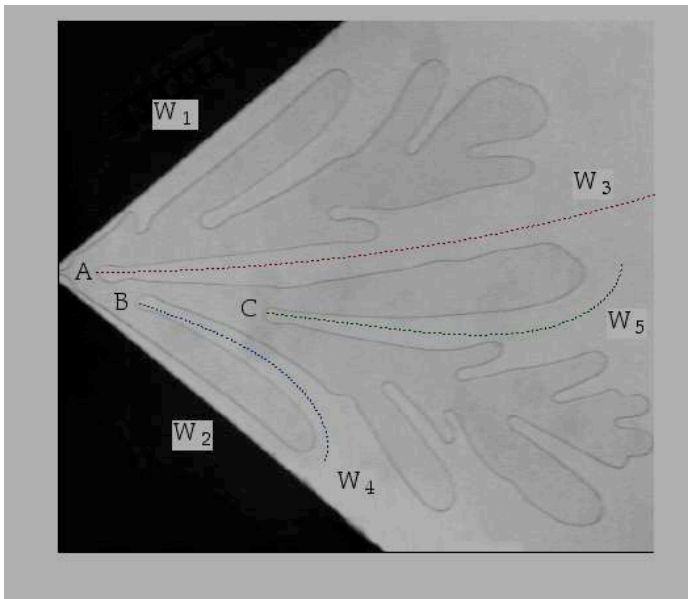
Le doigt de Saffman-Taylor



Canal rectiligne



radial

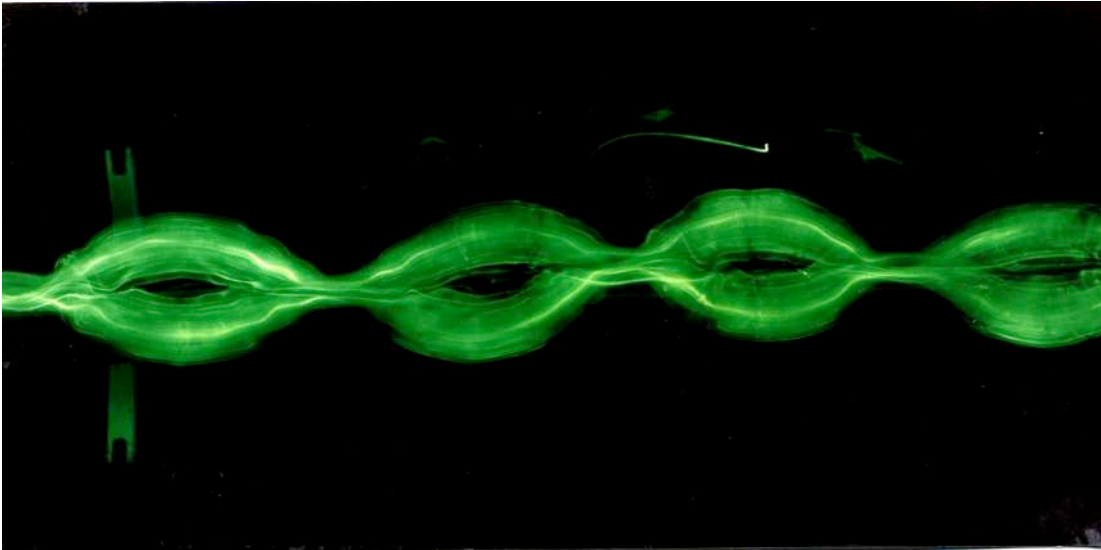


Canal divergent

Applications: récupération du pétrole
décollement d'un film (adhésion)

Instabilité de Crow

deux tourbillons parallèles contrarotifs se déstabilisent



Dryden Flight Research Center ECN 3831 Photographed 1974
B-727 vortex study NASA photo