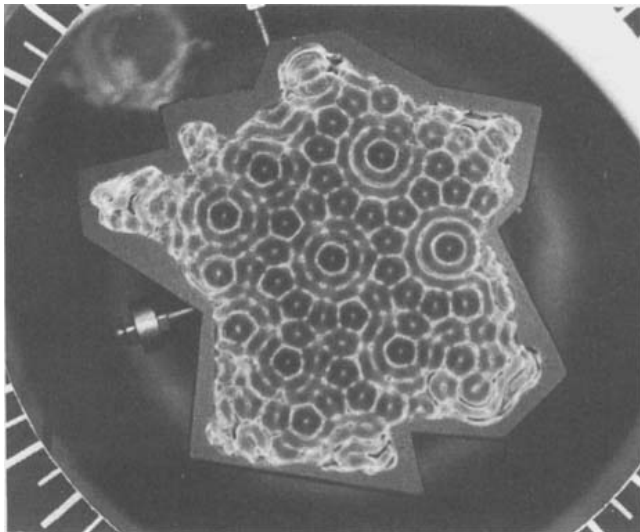
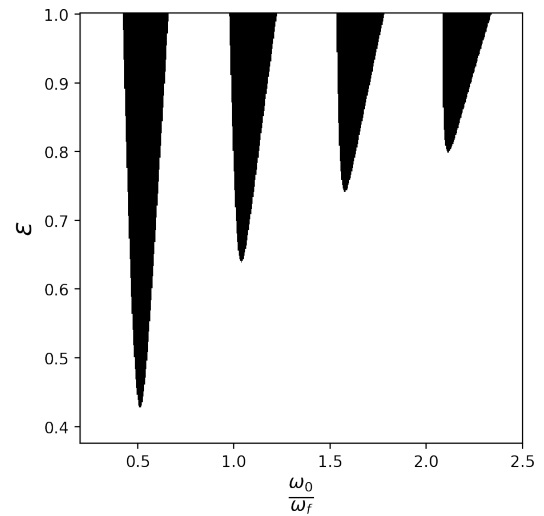


INSTABILITÉ DE FARADAY

Florian Poydenot



(a) Quasicristaux à la surface d'une huile oscillant verticalement



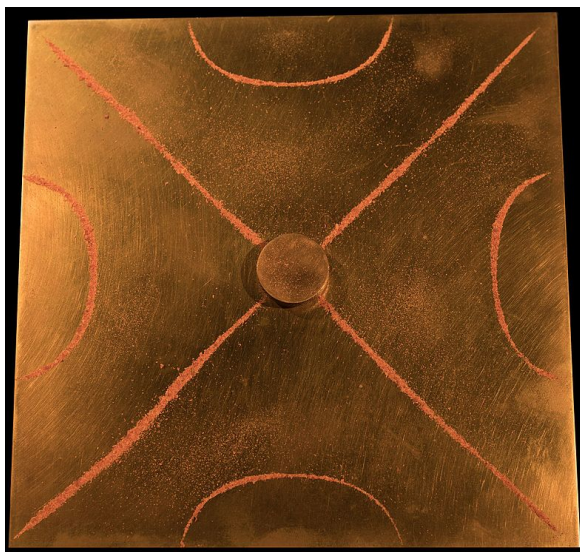
(b) Langues de résonance paramétrique

Table des matières

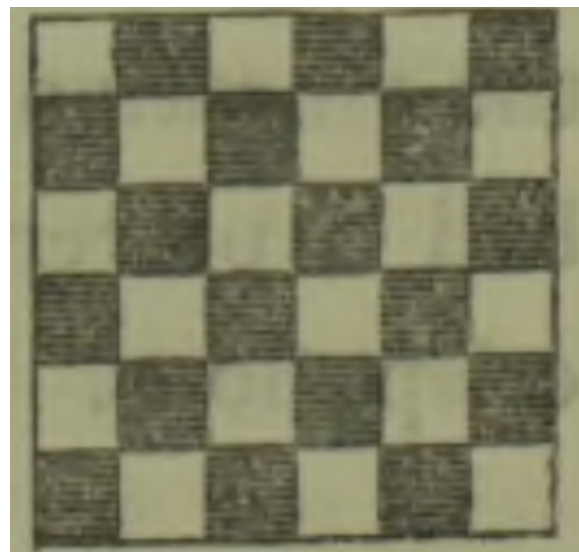
1	Le problème hydrodynamique	4
1.1	Interprétation qualitative	4
1.2	Équation d'évolution de l'amplitude des ondes	5
2	La résonance paramétrique	6
2.1	Mise en évidence	6
2.2	Influence de la dissipation	7
2.3	Diagramme de stabilité	7
3	Motifs	9
3.1	Sélection de motifs	9
3.2	Équation d'amplitude	9
3.3	Multiplés fréquences d'excitation	10

Introduction

En 1787, Chladni découvre une méthode de visualisation des modes propres acoustiques d'une plaque : une poudre fine est versée sur la plaque, excitée à l'aide d'un archet. Les grains de la poudre sont mis en mouvement par les oscillations, qu'ils perturbent peu, et s'accumulent dans les nœuds de vibration de la plaque (figure 1a). Faraday réalise une grande quantité d'expériences sur ce sujet : il teste différentes poudres et substances ; parmi elles, l'eau. Il observe alors en 1831 qu'à la surface de l'eau se forment des ondes, qui oscillent à la fréquence moitié de la fréquence excitatrice. Elles forment des carrés, reproduits en figure 1b. Matthiessen (1868) réalise les mêmes expériences, mais trouve que les ondes de surface ont même période que le forçage. Rayleigh (1883) le fait à son tour et arrive aux mêmes conclusions que Faraday, sans pour autant pouvoir expliquer les motifs observés. Depuis les années 1950, de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été menés sur ce phénomène, appelé instabilité de Faraday. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux causes physiques de l'instabilité. Nous faisons ensuite une étude plus quantitative de la résonance paramétrique, mécanisme de base de l'instabilité de Faraday, et nous finissons par l'étude des motifs formés, qui sont d'une grande richesse.



(a) Plaque de métal saupoudrée de sable et vibrée par un archet. Les grains se déposent au niveau des nœuds de vibration du mode propre acoustique de la plaque. Photographie Matemateca (IME/USP)/Rodrigo Tet-suo Argenton.



(b) Ondes à la surface de l'eau observées par Faraday (1831). Les zones sombres sont les minimums, les zones claires les maximums de l'onde stationnaire. Elles oscillent en opposition de phase.

FIGURE 1 – Figure de Chladni et observation expérimentale de Faraday.

1 Le problème hydrodynamique

1.1 Interprétation qualitative

Considérons une perturbation périodique $\zeta(x, t)$ de l'interface d'un fluide dans le référentiel galiléen du laboratoire, représentée en figure 2. Le fluide est supposé parfait, de tension de surface γ . Aux positions des maximums d'amplitude, la pression hydrostatique est plus forte du fait de la plus grande masse d'eau qui les surplombe et de la courbure positive de l'interface liquide/air, qui d'après la loi de Laplace crée une suppression. Inversement, aux positions des minimums d'amplitude la pression est plus faible du fait d'une hauteur d'eau moindre et de la courbure négative. La différence de pression entre maximums et minimums crée un écoulement des maximums vers les minimums, qui tend à ramener la surface vers sa position d'équilibre $\zeta(x, t)$. Mais le fluide a une inertie et ne s'arrête pas : une demie-période plus tard, les positions respectives des maximums et des minimums s'inversent. Un écoulement dans le sens opposé au précédent ramène alors l'interface vers la position initiale. La gravité et la tension de surface jouent conjointement le rôle de force de rappel pour les oscillations de la surface libre : il y a formation d'ondes gravito-capillaires.

Supposons maintenant que la capillarité est négligeable et qu'un opérateur inverse le sens de \mathbf{g} . Cela équivaut à accélérer la cuve contenant le fluide vers le bas à $2g$, ou plus simplement à la retourner. L'interface n'est clairement pas stable et le fluide quitte définitivement sa position d'équilibre, n'ayant rien pour l'y ramener. Cette configuration expérimentale est peu commode : il paraît plus simple de faire osciller de bas en haut la cuve contenant le fluide, de telle sorte que dans le référentiel non-galiléen de la cuve l'accélération apparente de la pesanteur $\mathbf{g}(t)$ dépende du temps. Ce référentiel non-galiléen sera le référentiel d'étude par la suite.

Répetons l'étude précédente en supposant que $\mathbf{g}(t)$ varie à la période T_f moitié de la période des oscillations propres : $T_f = \frac{T_0}{2}$. L'interface à différents instants est représentée en figure 3. Lorsque $t = 0$, les ventres de vibration de $\zeta(x, t)$ atteignent leur maximum et \mathbf{g} est dirigé vers la verticale. Les dépressions sont ainsi au niveau des maximums et les surpressions au niveau des minimums, ce qui entraîne un écoulement des minimums vers les maximums. Un quart de période propre plus tard, $\mathbf{g}(\frac{T_0}{4})$ est orienté vers le bas, mais l'interface est plane : il n'y a pas de différences de hauteur, donc pas d'écoulement supplémentaire vers les minimums. À $t = \frac{T_0}{2}$, on retrouve la situation à $t = 0$ mais en inversant minimums et maximums. Là encore, il y a un écoulement qui renforce les maximums. Les situations en $t = \frac{3T_0}{4}$ et $t = \frac{T_0}{4}$ sont analogues. Finalement, sur une période, la perturbation a tendance à s'amplifier : il y a instabilité.

La tension de surface, négligée jusqu'alors, s'oppose à l'effet déstabilisant de $\mathbf{g}(t)$, comme le montre la figure 4. En effet, la courbure ne change pas de signe avec $\mathbf{g}(t)$ et crée une différence de

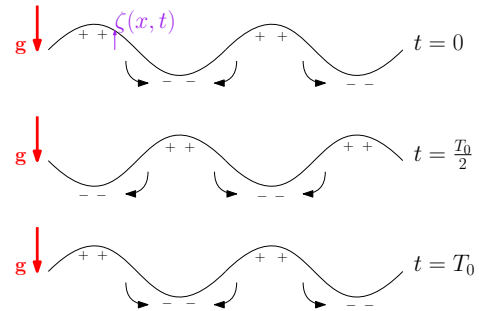


FIGURE 2 – Schéma des surpressions (+) et dépressions (-) à l'interface perturbée d'un fluide à différents instants. L'effet de la gravité est représenté en rouge, celui de la tension de surface en bleu. Leurs effets s'ajoutent et elles jouent conjointement le rôle de force de rappel.

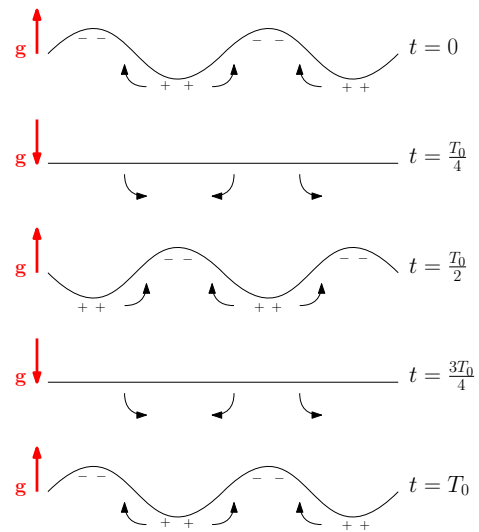


FIGURE 3 – Schéma des surpressions (+) et dépressions (-) à l'interface perturbée d'un fluide à différents instants. Seul l'effet de la gravité est étudié. Pour $T_f = \frac{T_0}{2}$, l'écoulement moyen durant une période se fait vers les ventres de vibration, augmentant ainsi leur amplitude : l'interface est instable.

en $t = \frac{3T_0}{4}$ et $t = \frac{T_0}{4}$ sont analogues.

pression entre maximums et minimums opposée à celle créée par la gravité. Les ondes gravitaires seront donc les plus sensibles aux oscillations de $\mathbf{g}(t)$.

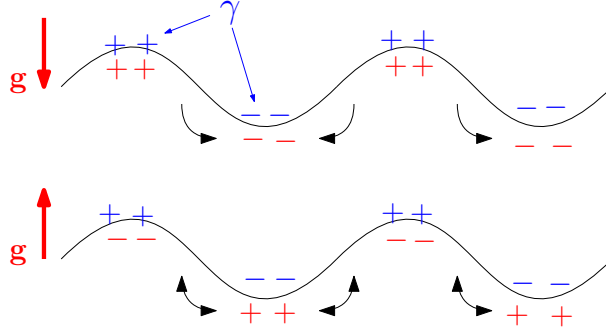


FIGURE 4 – Effets de la tension de surface dans le cas stable des ondes (\mathbf{g} orienté vers le bas) et de l'instabilité (\mathbf{g} orienté vers le haut). La capillarité tend toujours à ramener la surface perturbée vers sa position d'équilibre, quel que soit le sens de \mathbf{g} .

1.2 Équation d'évolution de l'amplitude des ondes

Cherchons une équation d'évolution de l'amplitude des ondes pour préciser les prédictions que nous venons de faire. Considérons un fluide bidimensionnel de profondeur h représenté en figure 5, étudié dans le référentiel non-galiléen de la cuve vibrante, soumise à l'accélération $\mathbf{g}(t) = -g(1 + \Gamma \cos(\omega_f t)) \mathbf{e}_z$.

La dissipation visqueuse est supposée négligeable : comme l'écoulement est initialement irrotationnel, il le reste à tout instant ultérieur et le champ de vitesse peut être cherché de la forme $\mathbf{v} = \nabla \phi$. L'incompressibilité de l'écoulement impose $\text{div } \mathbf{v} = 0$, donc

$$\Delta \phi = 0 \quad (1)$$

Les solutions cherchées sont des ondes, périodiques dans la direction Ox : la surface libre du fluide est donc décrite par $\zeta(x, t) = a(t)e^{ikx}$ et le potentiel des vitesses s'écrit $\phi(x, z, t) = f(z, t)e^{ikx}$. L'équation 1 implique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0 \quad (2)$$

La vitesse normale à la paroi en $z = 0$ est nulle, donc $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0$. Ainsi

$$f(z, t) = C(t) \text{ch}(kz) \quad (3)$$

avec $C(t)$ une constante d'intégration. L'amplitude des ondes est supposée faible : en négligeant les termes d'ordre 2 en \mathbf{v} , l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \implies \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g(t)z + p \right) = \mathbf{0} \quad (4)$$

D'où $\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g(t)z + p = \text{constante}(t)$. Cette constante peut être prise égale à la pression au-dessus du fluide p_{atm} par un choix approprié de ϕ (le potentiel des vitesses est défini à une fonction du temps uniquement près). L'équation ainsi obtenue est une généralisation du théorème de Bernoulli à des écoulements instationnaires, dans la limite des faibles vitesses :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g(t)z + p = p_{\text{atm}} \quad (5)$$

Les conditions aux limites à la surface du fluide permettent de trouver une équation régissant $\zeta(x, t)$. Tout d'abord, il n'y a pas de création de vide à l'interface :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}(z = h) \implies C(t) = \frac{\dot{a}(t)}{k \operatorname{sh} kh} \quad (6)$$

Ensuite, la surface libre est courbée : elle suit donc la loi de Laplace

$$p_{\text{atm}} - p(z = h) = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (7)$$

L'équation décrivant l'amplitude est obtenue en combinant 7, 6 et 5 prise en $z = h$:

$$\ddot{a} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \cos(\omega_f t)) a = 0 \quad (8)$$

C'est l'équation de Mathieu. ω_0 est la pulsation propre du système, donnée par la relation de dispersion des ondes de surface en eau peu profonde :

$$\omega_0^2 = \operatorname{th}(kh) \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \quad (9)$$

ε est un paramètre adimensionné qui traduit l'importance relative du forçage sur $\mathbf{g}(t)$:

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g}} \quad (10)$$

En régime purement gravitaire, $gk \gg \frac{\gamma k^3}{\rho}$ donc $k \ll \frac{1}{l_c} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$ avec l_c la longueur capillaire. Dans ce cas des grandes longueurs d'onde, $\varepsilon \approx \Gamma$. Pour les courtes longueurs d'onde, soit le régime capillaire, $\varepsilon \approx \frac{\Gamma}{\gamma k^2 / \rho g}$ est abaissé par la tension de surface qui est indépendante des variations de $\mathbf{g}(t)$. L'effet du forçage sera le plus important pour des ondes gravitaires (Douady (1990)), comme nous l'avons supposé à la section 1.1.

2 La résonance paramétrique

2.1 Mise en évidence

L'équation de Mathieu régit également, pour les petits angles, l'évolution d'un pendule simple dont le point d'attache oscille verticalement à la pulsation ω_f , représenté en figure 6 :

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{l} (1 + \varepsilon \cos(\omega_f t))}_{\omega^2(t)} \theta = 0 \quad (11)$$

Elle comporte un terme d'excitation en $\cos(\omega_f t)$ mais, contrairement à une force pour un oscillateur harmonique amorti, ce terme n'agit pas sur la position ou la vitesse : ce sont les paramètres du système, ici la pulsation $\omega(t)$, qui varient de façon imposée au cours du temps. Le forçage paramétrique apporte de l'énergie au système, mais y a-t-il résonance ? L'équation 11 peut se réécrire $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\varepsilon \omega_0^2 \cos(\omega_f t) \theta$. Si θ est sinusoïdal à la pulsation propre ω_0 , alors le produit $\cos(\omega_f t) \theta$ comporte des termes en $\omega_f - \omega_0$ et $\omega_f + \omega_0$, qui peuvent être résonants si $\omega_f - \omega_0 = \omega_0$ soit $\omega_f = 2\omega_0$. Comme nous l'avons estimé à la section 1.1, la résonance paramétrique se fait au double de la fréquence propre (ou inversement : le système répond à la moitié de la fréquence d'excitation, on parle de résonance sous-harmonique), contrairement à la résonance d'une force excitatrice qui se fait autour de la fréquence propre (résonance harmonique).

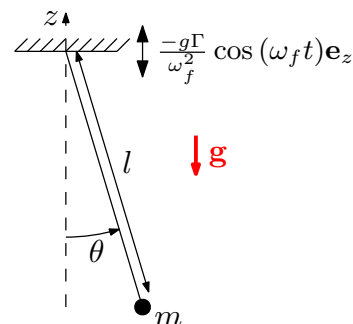


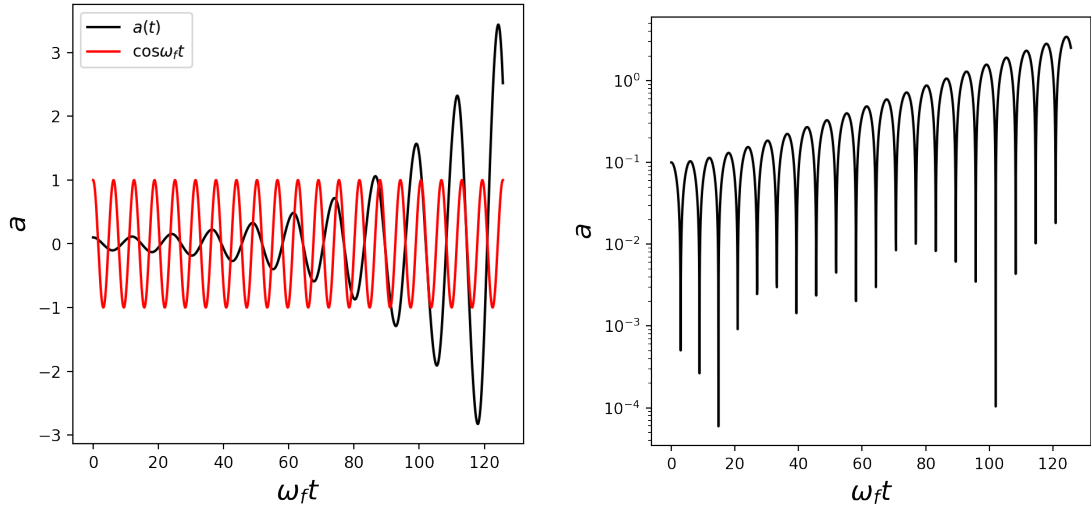
FIGURE 6 – Schéma d'un pendule simple de masse m , de longueur l , dont la position du point d'attache oscille verticalement à la pulsation ω_f , représenté en figure 6 : $\frac{-g\Gamma}{\omega_f^2} \cos(\omega_f t) \mathbf{e}_z$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dans le référentiel du point d'attache, θ suit l'équation de Mathieu (11).

2.2 Influence de la dissipation

Dans le cas d'un pendule simple, la dissipation par frottements fluides avec l'air est décrite en ajoutant un terme linéaire en $\dot{\theta}$ au membre de gauche de l'équation 8. Pour un fluide, l'analyse faite à la section 1.2 ne tient plus lorsque la viscosité est prise en compte : elle crée de la vorticité, l'écoulement ne reste pas irrotationnel donc l'hypothèse de l'écoulement potentiel $\mathbf{v} = \nabla \phi$ n'est plus valable. On peut ajouter un terme dissipatif phénoménologique $+\mu\dot{a}$; pour une cuve infiniment grande et profonde où la seule dissipation vient de la viscosité en volume, $\mu = 2\nu k^2$ avec ν la viscosité cinématique du fluide (Bechhoefer et al. (1995)). Dans les autres cas, μ est déterminé expérimentalement.

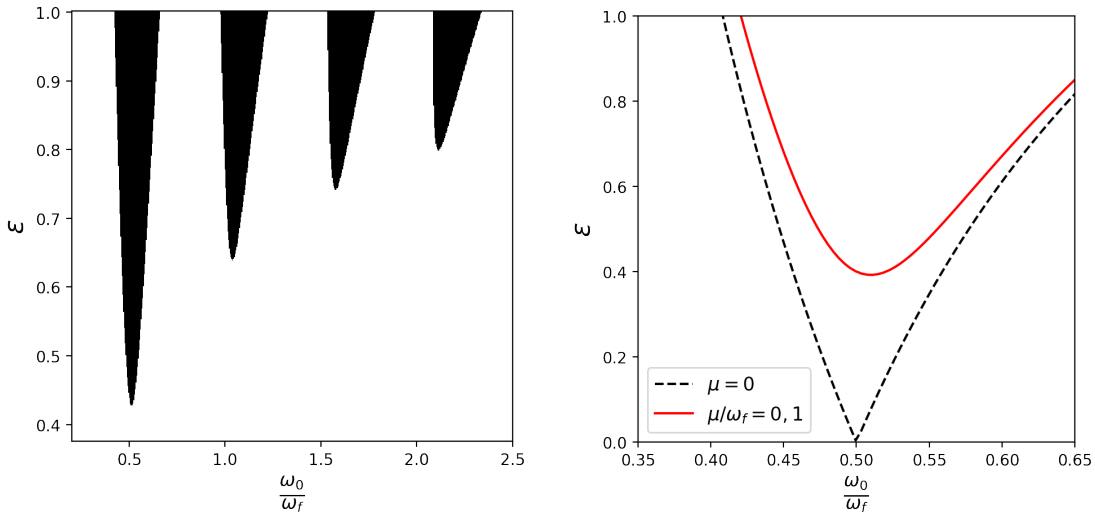
2.3 Diagramme de stabilité

Pour une résonance en position ou en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti, la solution n'est jamais rigoureusement nulle à tout instant, même en excitant le système initialement au repos à sa position d'équilibre ; la solution a une amplitude maximale mais finie à la résonance, et une amplitude faible en dehors. Au contraire, pour une solution résonante paramétriquement, l'amplitude diverge exponentiellement. La solution nulle est une solution de l'équation de Mathieu : il faut que le système soit perturbé initialement, même de façon infinitésimale, pour qu'il y ait résonance. Une solution résonante est représentée en figure 7. En dehors de la résonance, une perturbation infinitésimale ne diverge pas, elle est stable. Ces deux  tats possibles sont représentés dans un diagramme de stabilité dans le plan $\left(\frac{\omega_0}{\omega_f}, \varepsilon\right)$ (figure 8).   l'intérieur des « langues » d'instabilité, il y a résonance paramétrique. Le calcul montre qu'il existe également des résonances à $\frac{\omega_0}{\omega_f} = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, représentées en figure 8a. La dissipation crée un seuil d'excitation minimale, qui augmente avec n ; pour $\omega_f = 2\omega_0$, $\varepsilon_{\min} = \frac{\omega_f \mu}{\omega_0^2}$. En pratique, c'est cette résonance qui se manifeste le plus facilement, car son seuil est le plus bas.



(a) Solution instable. L'excitation $\cos \omega_f t$ est représentée en rouge. (b) Solution instable (valeur absolue) en échelle logarithmique. La divergence exponentielle est visible.

FIGURE 7 – Solution résonante. $\varepsilon = 0,25$, $\frac{\omega_0}{\omega_f} = 0,5$.



(a) Différentes « langues » de résonance. La zone d'instabilité est en noir, la zone de stabilité est en blanc. Ces domaines sont calculés numériquement : l'équation de Mathieu avec dissipation (ici $\mu/\omega_f = 0,1$) est résolue pour les conditions initiales $a(0) = 0,01$, $\dot{a}(0) = 0$ et différentes valeurs de $(\varepsilon, \frac{\omega_0}{\omega_f})$. Si $a > a_{\text{seuil}} = 1$, la solution est dans le domaine d'instabilité.

(b) Détail de la « langue » de résonance à $\omega_f = 2\omega_0$, avec et sans dissipation. L'amplitude seuil a pour expression $\varepsilon = 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{2\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_f \mu}{2\omega_0^2}\right)^2}$. La dissipation provoque l'apparition d'un seuil d'amplitude minimale à $\omega_f = 2\omega_0$ (Bergé et al. (1997)).

FIGURE 8 – Diagramme de stabilité dans le plan $\left(\frac{\omega_0}{\omega_f}, \varepsilon\right)$.

3 Motifs

3.1 Sélection de motifs

L'étude précédente a été faite pour un mode k , car ω_0^2 en dépend. Chaque mode suit une équation de Mathieu (8) ; le système d'équations pour tous les modes est découplé. À trois dimensions, un calcul (Benjamin et Ursell (1954)) en tous points similaire donne les mêmes résultats, en remplaçant k par $|\mathbf{k}|$ (désigné par la suite par k). Mais la cuve contenant le fluide n'est pas infiniment grande, et est souvent de dimensions très réduites, car il est difficile d'accélérer à haute fréquence une grande masse. Les ondes formées par la résonance paramétrique se réfléchissent sur les parois et forment un système d'ondes stationnaires, qui doit obéir aux conditions aux limites de la cuve. Les conditions de ras-bords représentées en figure 9 perturbent le moins la solution obtenue pour une cuve infinie. Comme pour toute onde stationnaire, les conditions aux limites quantifient k et fixent la répartition spatiale d'amplitude. Par exemple, pour une cuve cylindrique, les modes propres sont des fonctions de Bessel, représentés en figure 10a. Si la viscosité est grande, une onde va être amortie avant d'avoir pu atteindre les parois et se réfléchir. Un système d'ondes stationnaires formé de lignes et représenté en figure 10b s'établit quand même, mais il est indépendant des conditions aux limites.

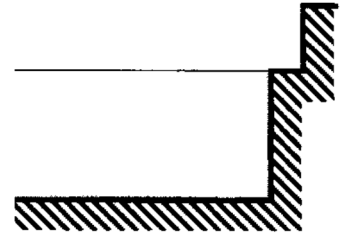
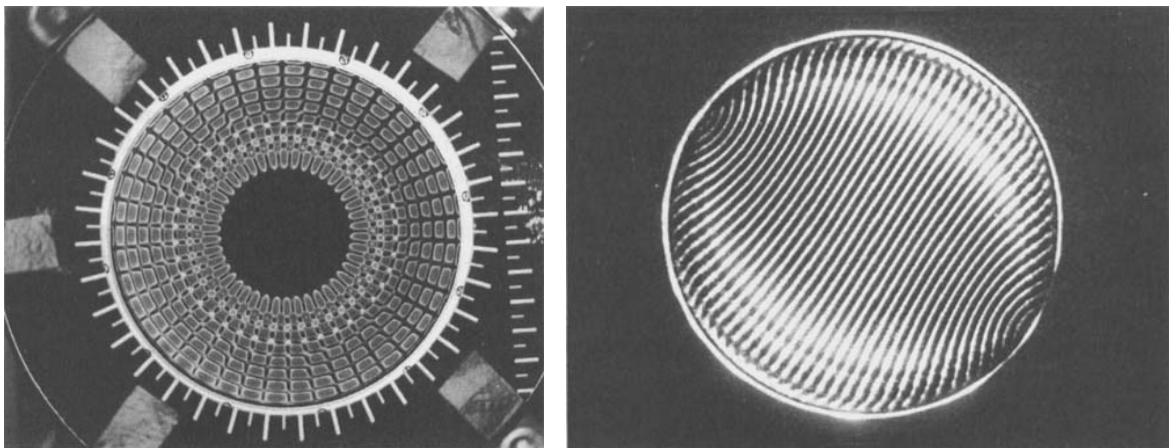


FIGURE 9 – Conditions aux limites sur le bord de la cuve. Le fluide ne mouille pas les parois. Reproduit de Bechhoefer et al. (1995).



(a) Onde stationnaire à la surface d'une cuve de 12 cm de diamètre, remplie d'eau sur 0,29 cm et excitée à 75 Hz. Le mode de Bessel obtenu est J_{21} .

(b) Onde stationnaire pour un fluide de grande viscosité (mélange eau-glycérol, $\nu = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), excitée à 80 Hz.

FIGURE 10 – Motifs à faible et grande viscosité, reproduits de Edwards et Fauve (1994).

3.2 Équation d'amplitude

La viscosité et les non-linéarités limitent l'amplitude des ondes, qui diverge autrement, mais couplent également les modes entre eux. Ce couplage permet de sélectionner les motifs. Pour obtenir les ordres après l'ordre linéaire, il est possible de faire des développements perturbatifs des équations de l'hydrodynamique ; mais il est possible de comprendre le système uniquement à l'aide d'arguments de symétrie (Douady (1990)). Étudions d'abord un unique mode, sans couplage : la surface est perturbée par $\zeta(x, y, t) = A(t)S(x, y)e^{i\frac{\omega_f t}{2}}$, avec $S(x, y)$ un mode propre instable de fréquence propre $\omega_0 \approx \frac{\omega_f}{2}$ et $A(t)$ l'amplitude complexe de l'enveloppe du mode, qui varie lentement à l'échelle d'une période $\frac{\pi}{\omega_f}$. Près du seuil d'instabilité, $\frac{dA}{dt} = F(A)$. Tout comme on dérive l'énergie libre dans le modèle de Landau des transitions de phase par des arguments de symétrie, $F(A)$ est développable en puissances de A et \bar{A} qui satisfont aux symétries du problème. Lorsque le système est excité, il est invariant sous la symétrie du forçage, donc sous

la transformation $t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega_f}$, soit $A \rightarrow -A$. À l'ordre non-linéaire le plus bas,

$$\frac{dA}{dt} = -\left(\frac{\mu}{2} + i\delta\right)A + \sigma\bar{A} - \beta|A|^2 A \quad (12)$$

Les développements perturbatifs montrent que μ est le coefficient de dissipation introduit précédemment, $\delta = \frac{\omega_f}{2} - \omega_0$ est le décalage en fréquence, $\sigma = \frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 > 0$ traduit la résonance paramétrique. β est complexe : $\Re(\beta) > 0$ traduit la dissipation non-linéaire qui empêche l'amplitude de diverger et $\Im(\beta) > 0$ correspond à un décalage en fréquence non-linéaire $\omega'_0 = \omega_0 - \Im(\beta)|A|^2$. Un tel type de relation de dispersion se retrouve sur un pendule simple aux grandes amplitudes, où la période T des oscillations est augmentée avec le carré de l'amplitude θ_0 : $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0}{16}\right)$ (avec T_0 la période aux amplitudes infinitésimales).

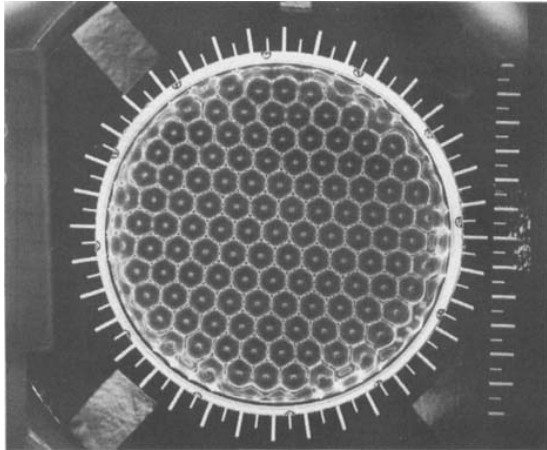
Pour plusieurs modes $i \in \mathbb{N}$ d'amplitudes A_i et de vecteurs d'ondes \mathbf{k}_i , les arguments précédents restent valables. Comme nous l'avons (partiellement) montré, les modes sont découplés à l'ordre linéaire. Le couplage se fait au travers de β , qui dépend uniquement de l'angle θ_{ij} entre deux vecteurs d'ondes \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_j , et avec le module de l'amplitude d'un autre mode $|A_j|^2$, seul terme invariant par $A_j \rightarrow -A_j$. Finalement,

$$\frac{dA_i}{dt} = -\left(\frac{\mu}{2} + i\delta\right)A_i + \sigma\bar{A}_i - \sum_j \beta(\theta_{ij}) |A_j|^2 A_i \quad (13)$$

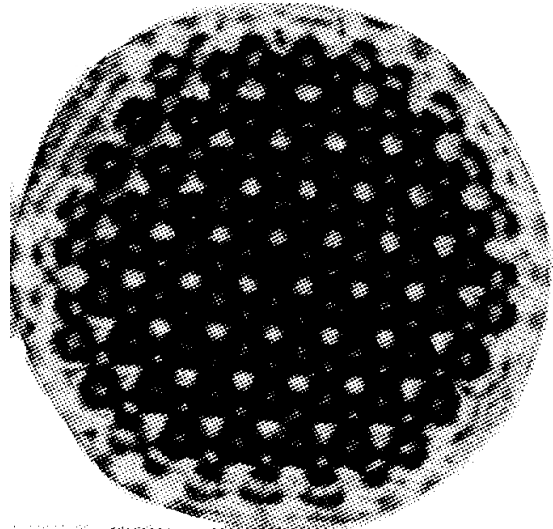
Lorsque $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_j$, le motif sélectionné est celui qui minimise l'énergie, qui dépend de β . Il se forme dans ce cas les carrés observés par Faraday.

3.3 Multiples fréquences d'excitation

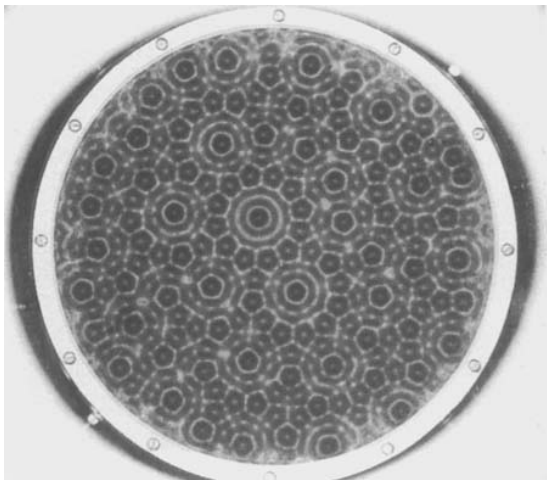
Nous avons mené l'étude jusque-là en supposant qu'il n'y avait qu'une unique fréquence d'excitation ω_f , mais l'excitation peut avoir une forme quelconque tant qu'elle est périodique. Si maintenant $\mathbf{g}(t) = -g(1 + \Gamma f(t))\mathbf{e}_z$, avec $f(t) = \cos \chi \cos(2\omega_0 t) + \sin \chi \cos(\omega_0 t + \varphi)$, la symétrie $t \rightarrow t + \frac{\pi}{\omega_0} = t + \frac{2\pi}{\omega_f}$ est brisée car $f(t)$ n'est plus périodique par rapport à la courte période $\frac{\pi}{\omega_0}$, mais le reste uniquement par rapport à la longue période $\frac{2\pi}{\omega_0}$. La transformation $t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega_0}$ correspond à $A \rightarrow A$, et non plus $A \rightarrow -A$. Il y a donc des termes quadratiques en $|A_i|^2$, $A_i A_j$, $A_i \bar{A}_j$ etc. L'énergie s'en trouve modifiée. Lorsqu'il n'y avait qu'une fréquence d'excitation ω_f , l'interface oscillait à $\frac{\omega_f}{2}$, ce qui fixait *via* la relation de dispersion k . Quand il y a deux fréquences d'excitation, il y a deux vecteurs d'ondes résonants. La minimisation de l'énergie permet ainsi de créer des motifs représentés en figure 11.



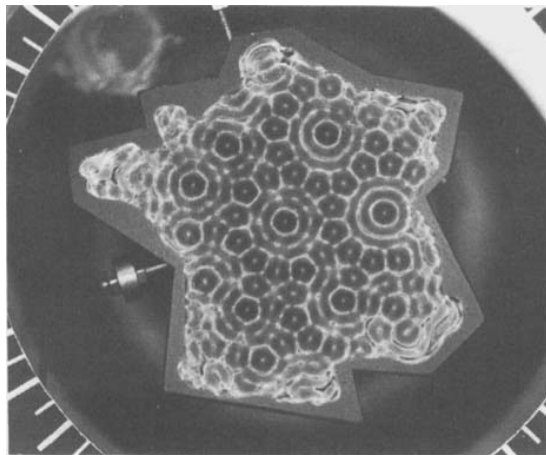
(a) Hexagones. Reproduit de Edwards et Fauve (1994).



(b) Triangles. Reproduit de Müller (1993).



(c) Quasi-cristaux. Ces motifs ont une symétrie d'ordre douze, mais ne peuvent pas paver le plan de façon périodique. Reproduit de Edwards et Fauve (1994).



(d) Quasi-cristaux. Les motifs sont indépendants des conditions aux limites. Reproduit de Edwards et Fauve (1994).

FIGURE 11 – Différents motifs obtenus pour du forçage à deux fréquences.

Conclusion

L'instabilité de Faraday est une résonance paramétrique : lorsque la pulsation d'excitation est un multiple entier de $\frac{\omega_0}{2}$, l'amplitude des ondes de surface diverge aux temps courts et est limitée aux temps longs par la viscosité et les non-linéarités. Le mode sélectionné dépend de la viscosité : pour des fluides de faible viscosité, c'est un mode propre de la cuve, pour des fluides de grande viscosité il est fixé par les symétries du problème, qui sont contrôlées par l'excitation. En choisissant bien la forme des oscillations verticales de la cuve, il est possible de générer différents motifs : carrés, lignes, hexagones, triangles et même motifs quasi-périodiques.

Références

- L. Matthiessen, *Annalen der Physik und Chemie* **210**, 107 (1868), ISSN 00033804, 15213889, URL <http://doi.wiley.com/10.1002/andp.18682100506>.
- L. Rayleigh, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **16**, 50 (1883), <https://doi.org/10.1080/14786448308627392>, URL <https://doi.org/10.1080/14786448308627392>.
- M. Faraday, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **121**, 299 (1831), <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1831.0018>, URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1831.0018>.
- S. Douady, *Journal of Fluid Mechanics* **221**, 383 (1990), ISSN 0022-1120, 1469-7645, URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112090003603.
- J. Bechhoefer, V. Ego, S. Manneville, et B. Johnson, *Journal of Fluid Mechanics* **288**, 325 (1995), ISSN 0022-1120, 1469-7645, URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112095001169.
- P. Bergé, Y. Pomeau, et C. Vidal, *L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence* (Hermann, 1997).
- T. Benjamin et F. Ursell, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **225**, 505 (1954), ISSN 2053-9169, URL <http://www.royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1954.0218>.
- W. S. Edwards et S. Fauve, *Journal of Fluid Mechanics* **278**, 123 (1994), ISSN 0022-1120, 1469-7645, URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112094003642.
- H. W. Müller, *Physical Review Letters* **71**, 3287 (1993), ISSN 0031-9007, URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.3287>.