



Systeme quantique à deux niveaux, application à l'oscillation des neutrinos

Nathan Vaudry

Master préparation à l'agrégation

Avril 2019

SOMMAIRE

INTRODUCTION	3
I SYSTEME QUANTIQUE A 2 NIVEAUX	3
1) Définition	3
2) Recherche des valeurs propres	4
3) Evolution du système	4
II APPLICATION A L'OSCILLATION DES NEUTRINOS	5
1) L'anomalie des neutrinos solaires	6
2) Les neutrinos ont une masse	8
3) Où en sont les recherches de nos jours ?	10
CONCLUSION	10
BIBLIOGRAPHIE	11

Introduction

J'ai choisi de parler du phénomène d'oscillation des neutrinos car j'en avais entendu parler par mon professeur de mécanique quantique de troisième année de licence à Sorbonne Université. Ce phénomène est important pour les physiciens des particules car il a permis de déterminer de manière indirecte la masse des neutrinos alors que cette dernière était supposée nulle. Cette découverte fut récompensée par l'attribution d'un prix Nobel en 2015 pour les physiciens japonais Takaaki Kajita et canadien Arthur McDonald. L'objectif de ce rapport sera de vous indiquer ce qu'est l'oscillation des neutrinos et comment ce phénomène peut être décrit dans le cadre de la mécanique quantique comme un système quantique à deux niveaux dont je rappellerai les propriétés (définition, états propres, évolution temporelle).

I Système quantique à 2 niveaux

1) Définition

Un système quantique possédant différents niveaux d'énergies (molécule dans un puits quantique, spin d'un électron) peut être décrit en ne considérant que ses deux premiers niveaux d'énergies.

Ce système possède la particularité d'être un des seuls systèmes dont l'on connait très bien l'évolution temporelle.

Dans le monde quantique ce système peut très bien être dans ces deux niveaux d'énergie au même moment. Mais lorsque l'on souhaite mesurer son énergie à un instant donné, il y a une variation aléatoire de la probabilité d'être à un niveau d'énergie donné.

Le moyen le plus efficace de prouver la superposition des niveaux d'énergie est d'observer l'effet d'une perturbation (typiquement électromagnétique) ayant une « bonne fréquence ».

Lorsque l'on calcule la valeur moyenne de la probabilité de mesure de l'énergie du système, on obtient une oscillation dite de Rabi. (2)

Dans la suite nous aurons besoin des matrices dites de Pauli :

$$-\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$-\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$-\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Avec i tel que $i^2 = -1$.

2) Recherche des valeurs propres

Considérons un système 2 à niveaux couplés entre eux de manière libre (spin) ou par un effet quelconque (effet tunnel). Soit $|e\rangle$ et $|g\rangle$ les 2 états propres du système sans couplage. L'hamiltonien du système s'écrit dans la base des états propres $H_0 = \hbar\omega_0\sigma_z/2$

ω_0 est la pulsation caractéristique de transition entre les deux niveaux d'énergie.

L'hamiltonien du couplage entre les 2 états s'écrit dans la base des états propres :

$H_1 = \hbar\Omega\cos(\omega t + \phi) (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$ avec Ω correspondant à la pulsation de couplage et ω celle de la perturbation envoyée.

Pour rechercher les états propres du nouveau système on se place dans le référentiel tournant à la fréquence du champ.

On effectue alors une transformation de l'hamiltonien et de la fonction d'onde à l'aide de la fonction R qui à tout t associe $\exp(i\omega t/2\sigma_z)$ (exponentielle de matrice associée à une rotation).

L'hamiltonien d'étude est après calculs :

$$H_{\text{eff}} = (\hbar\Omega_{\text{eff}}/2)(u_x\sigma_x + u_y\sigma_y + u_z\sigma_z) = (\hbar\Omega_{\text{eff}}/2)(u \cdot \sigma)$$

Avec :

$-\Omega_{\text{eff}} = (\Omega^2 + \delta^2)^{0.5}$ et $\delta = \omega_0 - \omega$ le désaccord qui caractérise l'écart entre la pulsation de l'onde et la pulsation de la transition entre les deux niveaux ;

$$-u = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \text{ tel que } \tan(\theta) = \Omega/\delta \text{ et } \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Cet hamiltonien peut être diagonalisé et on obtient les états propres du système (notés $|+v\rangle$ et $|-v\rangle$) tels que :

$$-E_{\pm} = \pm \hbar\Omega_{\text{eff}}/2 ;$$

$$-|+v\rangle = \cos(\theta/2)\exp(-i\phi/2)|e\rangle + \sin(\theta/2)\exp(i\phi/2)|g\rangle$$

$$-|-v\rangle = -\sin(\theta/2)\exp(-i\phi/2)|e\rangle + \cos(\theta/2)\exp(i\phi/2)|g\rangle^1$$

3) Evolution du système

Supposons que le système se trouve initialement dans l'état $|e\rangle$ et que l'angle ϕ est nul (c'est donc une perturbation classique).

On a $|e\rangle = 2^{-0.5} (|+v\rangle + |-v\rangle)$ ce qui donne

¹ L. Allen and J. H. Eberly. Optical Resonance and Two-Level Atoms. Wiley, New York, 1975

$|\psi(t)\rangle = 2^{-0.5} (\exp(-i\Omega_{\text{eff}}t/2) |+\nu\rangle + \exp(i\Omega_{\text{eff}}t/2) |-\nu\rangle)$ car les états $|+\nu\rangle$ et $|-\nu\rangle$ sont des états propres du système.

La probabilité de détecter l'atome dans l'état $|e\rangle$ à l'instant t est la suivante :

$$P_e = |\langle e | \psi(t) \rangle|^2 = 0,5(1 - \cos(\Omega_{\text{eff}}t))$$

$P_e(t)$ oscille au cours du temps à la pulsation Ω_{eff} : c'est le phénomène de l'oscillation de Rabi classique. Cette oscillation est d'autant plus rapide que le couplage est fort entre le système et la perturbation extérieure et que le désaccord δ est faible : nous avons un phénomène de résonance.

On peut faire des remarques sur cette formule :

A $\Omega_{\text{eff}}t = \pi/2$ il y a superposition cohérente à poids égaux des deux états soit

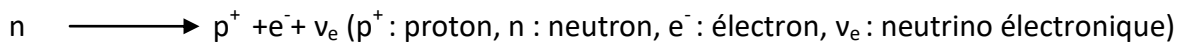
$$|\psi\rangle = 2^{-0.5} (|e\rangle - i|g\rangle)$$

A $\Omega_{\text{eff}}t = \pi$ l'atome a émis avec certitude un quantum d'énergie (phénomène d'émission stimulée). $|\psi\rangle = i|g\rangle$

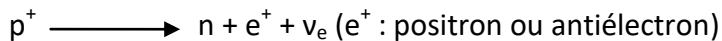
A $\Omega_{\text{eff}}t = 2\pi$ l'état atomique est égal à l'état initial, modulo une phase de π . $|\psi\rangle = -|e\rangle^2$

II Application à l'oscillation des neutrinos

Le neutrino est une particule qui fut postulée pour la première fois par Wolfgang Pauli en 1930 pour expliquer le fait que lors de la désintégration β^- ($n \longrightarrow p^+ + e^-$) (p^+ : proton, n : neutron, e^- : électron), l'énergie, la quantité de mouvement et le spin n'étaient pas conservés. La désintégration β^- « équilibrée » est alors :



En réalité il s'avère que la particule prédite par Pauli et écrite auparavant ν_e était l'antineutrino électronique (noté $\bar{\nu}_e$) et que le neutrino électronique était produit lors de la désintégration β^+ :



La première confirmation expérimentale du neutrino remonte à 1956 par Frederick Reines et Clyde Cowan à Hanford dans l'état de Washington.

En réalité il existe 3 types (appelés par la suite saveurs) de neutrinos, présentés dans la figure 1 : les neutrinos électronique (postulé par Pauli), muonique (découvert en 1962 au Brookhaven National Laboratory (BNL) aux Etats-Unis) et tauique (découvert quant à lui en 2000 dans le laboratoire Fermi Lab aux Etats-Unis).

² L. Allen and J. H. Eberly. Optical Resonance and Two-Level Atoms. Wiley, NewYork, 1975



Figure 1 : Les 3 saveurs de neutrinos: électronique (e), muonique (μ) et tauique (τ) (1)

1) L'anomalie des neutrinos solaires

On vit dans un monde de neutrinos : il en arrive 65 milliards/ seconde /cm² sur Terre. Le pionnier de la mesure des neutrinos, Raymond Davis, avait installé une expérience en 1965 dans la mine de Homestake aux Etats-Unis pour détecter les neutrinos en provenance du soleil, qui en produit d'énormes quantités grâce à ses réactions de fusion thermonucléaire. Après trois ans de mesures et de comptages, le flux que Davis mesurait était trois fois inférieur à celui qu'il aurait dû mesurer si les réactions nucléaires du soleil, sources de neutrinos, étaient bien comprises. C'est ce que les physiciens ont appelé *l'anomalie des neutrinos solaires*.

Longtemps, il fut considéré que quelque chose était erroné dans l'expérience et en plus elle ne permettait pas de déterminer ni l'énergie ni la direction d'origine des neutrinos détectés.

Dès 1962 les japonais Maki, Nakagawa et Sakata suggérèrent que les neutrinos peuvent changer de saveur, c'est-à-dire se transformer continuellement d'un type (électronique, muonique ou tauique) en un autre.

Pour pouvoir le prouver, il fallait pouvoir détecter tous les types de saveurs, même si le soleil ne devait produire théoriquement qu'une seule saveur (les neutrinos associés aux électrons).

La figure 4 présente le principe de détection des différentes saveurs des neutrinos. Le détecteur contient de l'eau deutérée très pure permettant de déterminer les trois saveurs de neutrinos par trois types d'interactions différentes (la diffusion élastique, qui mesure les trois flux, le « courant neutre », qui mesure le flux des neutrinos électroniques seul, et le « courant chargé », qui mesure à nouveau les trois flux, de manière différente de la diffusion élastique).

Dans ce type de détecteur, un neutrino transfère son énergie à un lepton (particule élémentaire de spin ½ insensible à l'interaction forte) chargé, qui se déplace plus rapidement que la lumière dans ce milieu, ce qui engendre, par effet Tcherenkov (effet analogue au bang sonique mais avec la lumière), une production de lumière caractéristique permettant de remonter à la trajectoire initiale de la particule.

Les avantages de ce type de détecteur sont de détecter à la fois la direction du neutrino, sa saveur et son énergie. En effet le rayonnement émis par effet Tcherenkov est différent selon la saveur du neutrino détecté.(3)

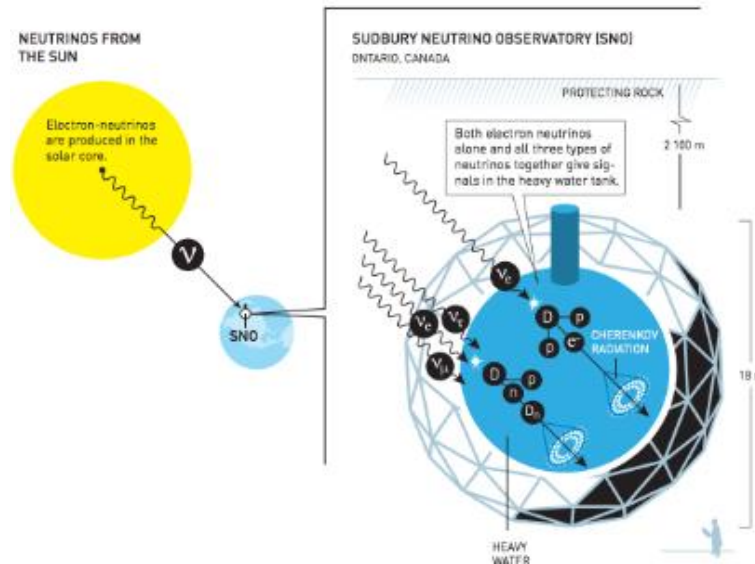


Figure 3 : Principe de détection des différents saveurs de neutrinos (1)

Les chercheurs de la collaboration Super Kamiokande au Japon en 1998 purent ainsi, grâce à ce type de détecteur, pour la première fois séparer le flux de neutrinos dans l'atmosphère en ses trois composantes. Mais ce sont les chercheurs de la collaboration SNO au Canada en 2001 qui observèrent des neutrinos non-électroniques dans le flux solaire et résolurent donc le mystère de l'anomalie des neutrinos solaires (5).

La figure 4 représente les résultats obtenus par la collaboration SNO.

Les neutrinos électroniques ne contribuant qu'au tiers du flux total, les deux autres tiers étant composés des deux autres saveurs. Cette mise en évidence fut un grand bouleversement puisqu'elle prouvait que les neutrinos pouvaient *changer de saveur* durant leur trajet entre le Soleil et la Terre. *Ils oscillaient d'une saveur à une autre* (3). Le flux total était lui en parfait accord avec la théorie de la structure interne du soleil et de ses réactions nucléaires produisant uniquement des neutrinos électroniques.

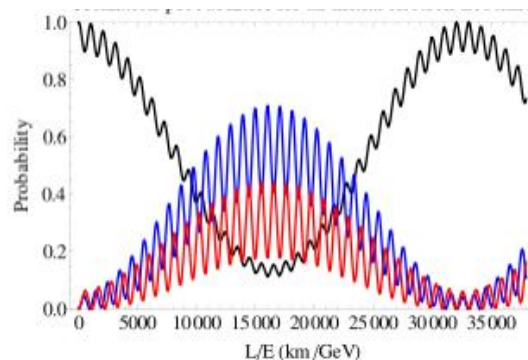


Figure 4 : probabilité d'oscillation pour un neutrino initialement électronique (neutrino solaire) en fonction du rapport distance parcourue sur énergie (3)

2) Les neutrinos ont une masse

Une telle oscillation entre saveurs est rendue théoriquement possible si on considère qu'un neutrino est une particule qui existe sous trois états de saveurs et trois états de masse, mais qui ne coïncident pas. *Un neutrino est une superposition de trois états de masse différents* (mais de masses très petites et très proches), c'est une combinaison linéaire de ces trois états. Lorsque le neutrino se meut, la phase entre les états de masse change, ce qui induit un changement de saveur (3).

Ce phénomène peut être décrit par un système à 3 niveaux. On peut dès lors réeffectuer les calculs décrits dans les sections I 3 et I 2 en considérant un système à 2 niveaux (c'est une approximation).

Il nous faut pour cela présenter 2 bases caractéristiques :

-Base saveur : $|v_e\rangle$, $|v_\tau\rangle$ et $|v_\mu\rangle$ (caractérisant si le neutrino est e, τ ou μ)

-Base énergie : $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ et $|v_3\rangle$ (caractérisant l'énergie du système considéré)

$$E_1 \quad E_2 \quad E_3$$

On définit Q comme étant l'angle de mélange qui définit comment les états de masse diffèrent des états de saveur.

On a à l'état initial : $|v_e\rangle = \cos(Q) |U_1\rangle + \sin(Q) |U_2\rangle$, avec $|U\rangle$ un état de la base énergie.

Après évolution dans le temps : $|\psi(t)\rangle = \exp(-iE_1t/\hbar) |U_1\rangle + \exp(-iE_2t/\hbar) |U_2\rangle$

E_1 et E_2 sont les énergies propres des états $|U_1\rangle$ et $|U_2\rangle$

On peut alors calculer la probabilité de changer de saveur :

$$P_{\text{changement}} = \sin^2(2Q) \sin^2((E_1 - E_2)t/\hbar) \quad (1)$$

On suppose que les neutrinos sont relativistes (Ils voyagent à une vitesse proche de celle de la lumière).

On a alors $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ avec $p \gg mc$. Ainsi $E = pc + m^2c^3/(2p)$.

$$\text{D'où } E_1 - E_2 = (m_1^2 - m_2^2)c^3/(2p). \quad (1)$$

On constate alors que les oscillations entre les différents états sont caractéristiques de masses différentes.

Par la suite nous réécrivons cette probabilité comme :

$$P(n_x \rightarrow n_y) = \sin^2(2Q) \sin^2(1,27 D m^2 (L/E)) \quad (3)$$

Avec $Dm^2 = m_1^2 - m_2^2$, L la distance parcourue (en km) et E l'énergie de la particule (en GeV)

Aujourd'hui il existe trois saveurs connues de neutrinos (électronique, muonique et tauique) et non deux. Ainsi l'expression de la probabilité d'oscillation est un peu plus complexe. Toutefois on peut déterminer les probabilités d'oscillation à l'aide d'une matrice de passage entre ces deux bases dite matrice (P)MNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) ou « matrice d'oscillation des neutrinos » présentée dans la figure 5.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 5 : Matrice (P)MNS. $c_{ij}=\cos(Q_{ij})$ et $s_{ij}=\sin(Q_{ij})$ ³

Ainsi quand L/E est petit, on obtient :

$$P(n_\mu \rightarrow n_e) = \cos^2(Q_{13})\sin^2(2Q_{23})\sin^2(1,27Dm^2_{23}L/E)$$

$$P(n_e \rightarrow n_\mu) = \sin^2(2Q_{13})\sin^2(Q_{23})\sin^2(1,27Dm^2_{23}L/E)$$

$$P(n_e \rightarrow n_\tau) = \sin^2(2Q_{13})\cos^2(Q_{23})\sin^2(1,27Dm^2_{23}L/E)$$

Et quand L/E est grand :

$$P(n_e \rightarrow n_{t,\mu}) = \cos^2(Q_{13})\sin^2(2Q_{12})\sin^2(1,27Dm^2_{12}L/E) + \sin^2(2Q_{13})/2 \quad (3)$$

Avec n_μ, n_e et n_t les neutrinos respectivement muonique, électronique et tauique. Ainsi les oscillations obtenues permettent de montrer que les neutrinos possèdent une masse. Ces dernières sont mentionnées dans la figure 6.



Figure 6 : Modèle standard des particules (4)

³ Valle, J. W. F. (2006). "Neutrino physics overview". Journal of Physics: Conference Series. 53

3) Où en sont les recherches de nos jours ?

La collaboration OPERA, utilisant un détecteur installé dans le tunnel du Gran Sasso en Italie, cherche depuis 2006 à déceler les neutrinos tauiques issus de l'oscillation de neutrinos muoniques générés au CERN distant de 731 km (Donc pour L grand). En 2010, la collaboration a annoncé avoir mis en évidence avec une probabilité de 98 % un évènement de ce type, ce qui serait la première constatation d'une oscillation vers le neutrino tauique.

L'expérience T2K (Tokai to Kamiokande), située au Japon, utilise un faisceau de neutrinos créé par l'accélérateur JPARC à Tokai. Il détecte le flux de neutrinos par un ensemble d'appareils complémentaires à 280 m du point de création du faisceau, puis observe les neutrinos interagissant à 295 km de là dans le détecteur Tcherenkov à eau Super-Kamiokande.

En mesurant l'apparition de neutrinos électroniques dans ce faisceau de neutrinos muoniques, il aurait pour la première fois complété la matrice (P)MNS en 2012 en ayant $\theta_{12}=45^\circ$, $\theta_{23}=34^\circ$ et $\theta_{13}=9^\circ$ ⁴.

Conclusion

Je vous ai donc présenté le phénomène d'oscillation des neutrinos (passage d'une saveur à une autre) et ai tenté de le décrire grâce à la mécanique quantique. Ce phénomène permet de mesurer indirectement la masse de ces particules ce qui permet de mettre à jour le modèle standard des particules.

Mais les masses calculées ne sont que des limites supérieures (obtenue à l'aide de la fonction dite de Kurie dans le cas du neutrino électronique) (5).

Le phénomène d'oscillation des neutrinos a permis aux scientifiques de réfléchir quant à l'existence d'une ou plusieurs familles de neutrinos supplémentaires (dits neutrinos stériles) qui oscilleraient de la même façon avec les saveurs déjà connues, et qui pourraient expliquer notamment une autre anomalie des flux de neutrinos observée depuis quelques années auprès de réacteurs nucléaires. De manière générale l'oscillation des neutrinos a été une grande découverte mais elle amène beaucoup de travail avec elle dans le domaine de la cosmologie.

⁴ Esteban, Ivan; Gonzalez-Garcia, M.C.; Maltoni, Michele; Martinez Soler, Ivan; Schwetz, Thomas (2018). "Updated fit to three neutrino mixing: exploring the accelerator-reactor complementarity". Journal of High Energy Physics.

Bibliographie

(1) Cours 5 de Mécanique quantique : *systèmes à 2 niveaux*, Quentin Glorieux, Sorbonne Universités

(2) Vidéo [Toutestquantique](#), *superposition d'états et décohérence*

(3) Blog d'Eric Simon, *Ca se passe là-haut partie C'est quoi l'oscillation des neutrinos ?*

(4) Banque d'images 123RF, image 24987995

(5) Cours de physique des particules du Master recherche de physique subatomique et d'astroparticule, Johan Collot, Université de Savoie, 2004-2005

L. Allen and J. H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Wiley, NewYork, 1975

Valle, J. W. F. (2006). "*Neutrino physics overview*". *Journal of Physics: Conference Series*. **53** (1): 473–505.

Esteban, Ivan; Gonzalez-Garcia, M.C.; Maltoni, Michele; Martinez Soler, Ivan; Schwetz, Thomas (2018). "*Updated fit to three neutrino mixing: exploring the accelerator-reactor complementarity*". *Journal of High Energy Physics*.