

Ressources en eau douce sur l'île de Santa Cruz

Rapport de M2

Juliette MANSARD

Avril 2019



TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	2
PARTIE 1 : ETUDE DE LA NAPPE PHREATIQUE DE L'ILE DE SANTA CRUZ.....	2
A- PREMIER MODELE : AQUIFERE D'EAU DOUCE	2
B- DEUXIEME MODELE : INTRUSION D'EAU DE MER AVEC LA FORMULE DE GHYBEN-HERZBERG.....	3
C- TROISIEME MODELE : MODELE DE VERRUIJT	4
1- PRESENTATION DU MODELE	4
2- RESOLUTION DE VERRUIJT.....	4
D- COMPARAISON ENTRE MODELES	6
E- CONCLUSION.....	7
PARTIE 2 : MESURE DE LA CONDUCTIVITE HYDRAULIQUE GRACE AUX ONDES DE MAREES.....	7
A- MODELE	7
B- FORÇAGE PERIODIQUE.....	8
C- MESURE DE LA DIFFUSIVITE SUR L'ILE DE SANTA CRUZ.....	8
D- CONCLUSION.....	9
BIBLIOGRAPHIE	11

INTRODUCTION

L'île de Santa Cruz est une des îles de l'Archipel des Galápagos. Cet archipel forme une province de l'Equateur depuis 1832. L'île de Santa Cruz est la deuxième plus grande de l'archipel avec une superficie de 986km². Sa capitale Puerto Ayora est la zone urbaine la plus peuplée des Galápagos. Plus de douze mille personnes vivent sur l'île de Santa Cruz. Le tourisme y est en pleine expansion, et Santa Cruz accueille de plus en plus de visiteurs. Les besoins en eau potable augmentant avec le nombre d'individus présents sur le site, la question de la gestion de l'eau douce est devenue primordiale. De nombreuses études se sont ainsi penchées sur la présence de réserve d'eau douce dans le sous-sol.



Figure 1 – Archipel des Galápagos

Dans ce rapport, nous présenterons, dans un premier temps, différentes modélisations permettant de quantifier la quantité d'eau douce présente dans le sous-sol de Santa Cruz. Nous verrons ensuite une méthode utilisant les ondes de marées pour mesurer la conductivité hydraulique de l'île, paramètre déterminant pour la taille de la nappe phréatique.

PARTIE 1 : ETUDE DE LA NAPPE PHREATIQUE DE L'ILE DE SANTA CRUZ

Le but de cette partie est de terminer l'allure de la nappe phréatique de l'île de Santa Cruz. Nous allons présenter trois modèles différents, par ordre croissant de complexité.

Pour simplifier le cadre de notre étude, on considère la géométrie suivante pour l'île de Santa Cruz : rectangle de longueur infinie selon y et de largeur $2L$ selon x avec un axe de symétrie en $x=0$ où le débit est nul.

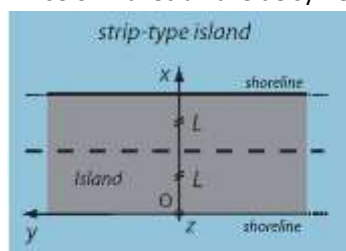


Figure 2 - Modélisation de l'île

A- PREMIER MODELE : AQUIFERE D'EAU DOUCE

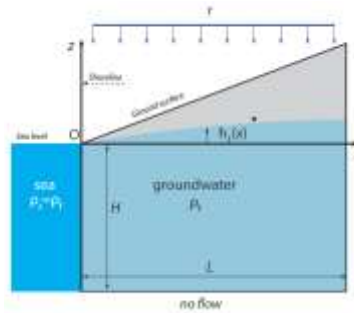


Figure 3 - Modèle 1

Les hypothèses du modèle sont :

- Un état stationnaire,
- Une aquifère homogène et infinie selon y,
- Des fluides de masse volumique constante,
- L'hypothèse de Dupuits (il n'y a pas de flux vertical, tous les flux sont horizontaux),
- Une perméabilité homogène et isotrope,
- Des fluides non miscibles à l'interface en x=0
- Une frontière imperméable en x=L.

On note h_1 la charge de l'écoulement, K la conductivité hydraulique et r la recharge en eau. Dans le cadre de l'hypothèse de Dupuits, la charge h_1 ne dépend pas de la coordonnée z et égale à la hauteur de la nappe. Elle ne dépend pas non plus de la coordonnée y car l'aquifère est infinie dans cette direction.

L'équation de diffusion s'écrit : $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} \int_{-H}^{h_1} K dz \right] = -r$. Ici K est isotrope homogène, donc constant. On obtient pour l'équation de diffusion : $K \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} (h_1 + H) \right] = -r$. A cette équation se rajoutent deux conditions aux limites :

- Par continuité de la charge, la charge de l'eau douce est égale à la charge de l'eau de mer en x=0 d'où

$$h_1(0) = 0$$

- On considère en x=L qu'il y a une frontière imperméable, le flux est donc nul à cet endroit

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(L) = 0$$

En intégrant l'équation (1) à l'aide des deux conditions (2) et (3), on obtient :

$$h_1(x) = -H + \sqrt{\frac{-r}{K}x^2 + \frac{2rL}{K}x + H^2} \text{ pour tout } x \in [0; L]$$

On divise cette équation par H afin d'obtenir une nouvelle équation adimensionnée. On obtient :

$$h_1^{(x)} = -1 + \sqrt{-\chi x'^2 + 2\chi\xi x' + 1} \text{ pour tout } x' \in [0; \xi] \text{ où } \xi = \frac{L}{H}, \chi = \frac{r}{K}, x' = \frac{x}{H}$$

B- DEUXIEME MODELE : INTRUSION D'EAU DE MER AVEC LA FORMULE DE GHYBEN-HERZBERG

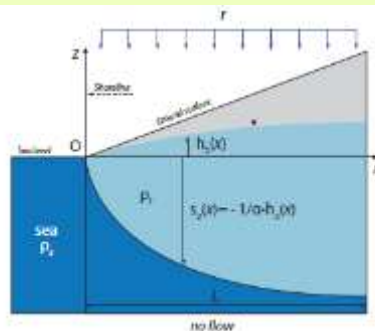


Figure 4 - Modèle 2

Les hypothèses du modèle sont :

- Un état stationnaire,
- L'hypothèse de Dupuits

- L'eau de mer est statique, pas de transfert de sel, et une interface imperméable entre l'eau douce et l'eau de mer,
- Une perméabilité homogène,
- Une frontière imperméable en $x=L$,
- Une aquifère homogène et infinie selon y .

On utilise la formule de Ghyben-Herzberg qui dit que : $h_2(x) = -\alpha s_2(x)$ où $\alpha = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \approx 1.40$

L'équation de diffusion s'écrit : $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x} \int_{-s_2}^{h_2} K dz \right] = -r$

Elle peut se réécrire sous la forme : $K \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h_2}{\partial x} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) h_2 \right] = -r$

Les conditions aux limites sont :

- Un flux nul en $x=L$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(L) = 0$$

- La continuité de la charge en $x=0$

$$h_2(0) = 0$$

La solution s'écrit sous la forme : $h_2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1} \left(-\frac{r}{K} x^2 + 2 \frac{rL}{K} x \right)}$ avec $x \in [0; L]$

L'équation adimensionnée se réécrit : $h_2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1} (-\chi x'^2 + 2\chi\xi x')}$ pour tout $x' \in [0; \xi]$

Notons que l'équation de s_2 est valable pour $s_2 > -H$. On obtient la conduite suivante : $\chi\xi^2 < \alpha(\alpha + 1)$

C- TROISIEME MODELE : MODELE DE VERRUIJT

1- PRESENTATION DU MODELE

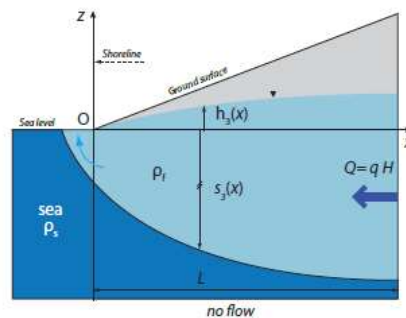


Figure 5 - Modèle 3

Les hypothèses du modèle sont :

- Un état stationnaire
- L'eau de mer est statique, pas de transfert de sel et une interface imperméable entre l'eau douce et l'eau de mer
- Une perméabilité homogène
- Un flux entrant en $x=L$, pas de précipitations
- Une aquifère homogène et infinie selon y

Ce cas correspond au modèle précédent à la translation du niveau inférieur de la nappe près. On ne fait plus l'hypothèse de Dupuit. On utilise la méthode de résolution de Verruijt afin d'obtenir les expressions de h_3 et s_3 .

2- RESOLUTION DE VERRUIJT

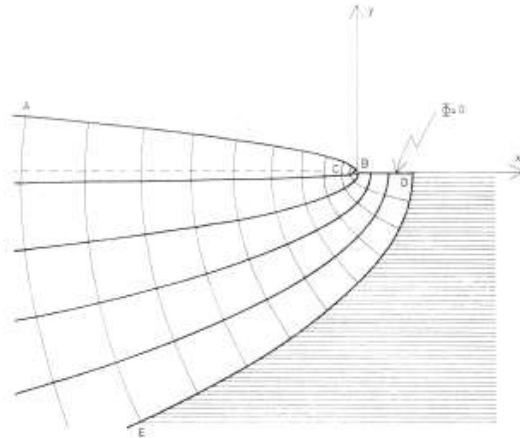


Figure 6 - Modèle de Verruijt

Les lignes épaisses représentent les lignes de courant de l'eau, tandis que les lignes fines représentent les iso-valeurs de la charge.

On note : $\Omega = \Phi + i\Psi$ le potentiel complexe.

Avec $\Phi = Kh$ (K la conductivité hydraulique et h la charge) et Ψ la fonction de courant définie telle que la vitesse de l'écoulement est, en notation complexe :

$$\underline{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Ainsi, les lignes épaisses de la courbe ci-dessus représentent les iso-valeurs de Ψ .

La conservation du débit nous impose :

$$Q = \Psi_{DE} - \Psi_{AB}$$

Ψ étant définie à une constante près, on a donc comme conditions aux limites :

- $\Psi_{AB} = 0$
- $\Psi_{DE} = Q$
- $\Phi_{CD} = 0$ car h est nulle entre C et D.
- Entre A et B on doit donc avoir :
 - $\Omega = \Phi = Kh = Ky$ (1)
- Entre C et D, de manière évidente on doit avoir : $y = 0$. (2)
- Entre D et E :

$$\Omega = \Phi + iQ \quad \text{et} \quad \Phi = Kh = -K\alpha y \quad (3)$$

En effet, en suivant la courbe d'iso-valeur de la charge pour rejoindre la surface supérieure, on obtient, pour un point situé sur la surface inférieure et d'ordonnée y , une valeur de charge de $-\alpha y$.

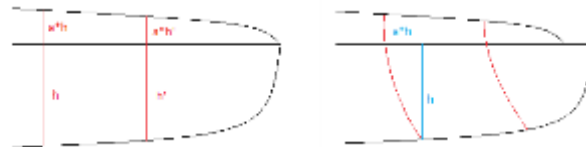


Figure 7 - A gauche, le cas de figure étudié dans le modèle 2, à droite, le cas de figure actuel

On va proposer une solution de ce problème, c'est-à-dire une équation définissant le potentiel Ω , du type $f(z) = 0$, avec $z = x + iy$, et on va vérifier qu'elle fonctionne (elle doit vérifier (1), (2) et (3)).

L'équation : $Kz + \frac{(1+\alpha)\Omega^2}{2\alpha Q} - i\Omega = 0$ (a)

Vérifie bien, compte tenu des conditions aux limites :

Entre A et B : $Kx + iKy + \frac{(1+\alpha)\Phi^2}{2\alpha Q} - i\Phi = 0$. En considérant la partie imaginaire : $\Phi = Ky$.

Entre C et D : $Kx + iKy + \frac{(1+\alpha)\Psi^2}{2\alpha Q} + \Psi = 0$. D'où : $y = 0$.

Entre D et E : $Kx + iKy + \frac{(1+\alpha)(\phi^2 - Q^2 + 2i\phi Q)}{2\alpha Q} - i\phi + Q = 0$

En considérant la partie imaginaire : $Ky = \phi - \frac{(1+\alpha)\phi Q}{\alpha Q}$. D'où : $\phi = -\alpha Ky$

Cette solution est donc admissible pour représenter le problème et l'égalité (a) est donc vérifiée en tout point de la nappe.

On va maintenant pouvoir définir l'équation de la surface AB et de la surface DE.

- Entre A et B, on a, comme vu plus haut : $Kx + iKy + \frac{(1+\alpha)\phi^2}{2\alpha Q} - i\phi = 0$ et $\phi = Ky$.

En considérant la partie réelle, on obtient : $Kx = -\frac{(1+\alpha)K^2y^2}{2\alpha Q}$. D'où : $h_3(x) = y(x) = \sqrt{\frac{2\alpha Q}{(1+\alpha)K} |x|}$

- Entre D et E, on a : $Kx + iKy + \frac{(1+\alpha)(\phi^2 - Q^2 + 2i\phi Q)}{2\alpha Q} - i\phi + Q = 0$ et $\phi = -\alpha Ky$. En considérant la

partie réelle, on obtient : $Kx = -\frac{(1+\alpha)(\alpha^2 K^2 y^2 - Q^2)}{2\alpha Q}$. D'où : $s_3(x) = -y(x) =$

$$-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 K^2} \left(\frac{2\alpha Q}{(1+\alpha)} (K|x| + Q) + Q^2 \right)}$$

Et : $s_3(x) = -\frac{Q}{K} \sqrt{\frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{K}{Q} |x| - 1 + \frac{(1+\alpha)}{2\alpha} \right)}$ ie : $s_3(x) =$

$$-\frac{Q}{K} \sqrt{\frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{K}{Q} |x| + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha} \right)}$$

On obtient alors les équations adimensionnées suivantes :

$$h'_3(x') = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \chi \cdot x'$$

$$s'_3(x) = -\chi \sqrt{\frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{(1-\alpha)}{2\alpha} + \frac{1}{\chi} \cdot x' \right)}$$

Avec $\chi = \frac{q}{K}$

Notons que l'équation de s_3 et s'_3 est valable pour $s_3 > -H$ et $s'_3 > -1$.

D- COMPARAISON ENTRE MODELES

A l'aide du logiciel *Maple*, nous avons tracé l'allure des nappes phréatiques pour chacun des trois modèles.

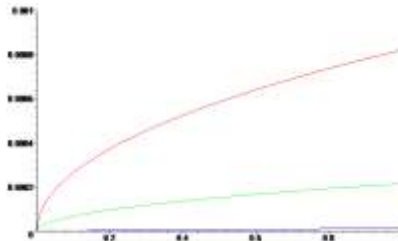


Figure 8 - Tracé du haut de la nappe d'eau douce (en rouge: h'2, en vert: h'3, en bleu h'1)

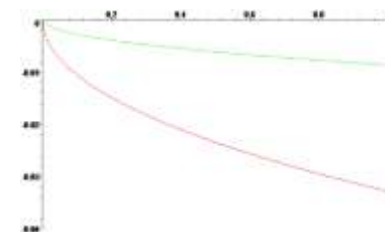


Figure 9 - Tracé du bas de la nappe d'eau douce (en rouge : s'2, en vert : s'3)

Pour tracer ces courbes, nous avons utilisé les valeurs suivantes, observé sur l'île de Santa Cruz :

- $r=300\text{mm/an}$
- $K=10^{-2}\text{m/s}$ (on verra un exemple de mesure possible dans la partie 2)
- $\chi=0.9 \cdot 10^{-6}$
- $L=15\text{km}$
- $H=1\text{km}$
- $\xi=15$

Le modèle 1 surestime la profondeur de la nappe d'eau douce puisqu'il considère qu'elle va jusqu'à la base de du substratum. Par contre il sous-estime le niveau haut de la nappe. Le modèle 2 a tendance à surestimer la taille de la nappe.

Cependant les écarts entre les différents modèles sont très faibles. Ils sont de l'ordre de 0.1% pour la délimitation de la surface haute de la nappe et de quelques pourcents pour ce qui concerne la surface basse. On peut visiblement donc utiliser sans problème n'importe lequel de ces trois modèles.

Alexandre Pryet, dans sa thèse *Hydrogeology of volcanic islands: a case-study in the Galapagos Archipelago*, a comparé ces trois modèles à une simulation numérique prenant en compte les échanges de sel entre eau douce et eau salée ainsi que les variations de masses volumiques en fonction de la salinité.

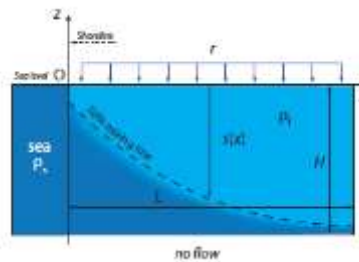


Figure 10 - Modèle utilisé pour la simulation numérique

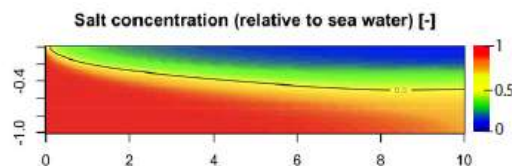


Figure 11 - Résultat de la simulation

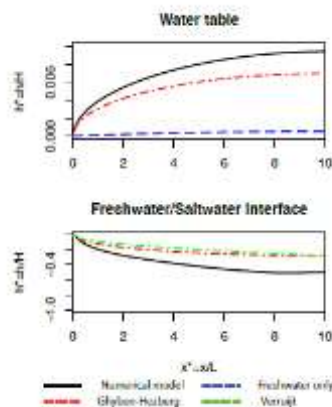


Figure 12 - Comparaison entre les différents modèles (cas où $\chi=10^{-5}$)

On voit que l'écart entre la simulation et les trois autres modèles pour l'altitude du haut de la nappe d'eau douce est très faible. Cependant l'écart de position pour l'interface eau douce-eau salée est plus important, il est de l'ordre de la vingtaine de pourcents.

E- CONCLUSION

Que ce soit en regardant les trois modèles étudiés ici, ou la simulation numérique, on se rend compte que la nappe d'eau douce est très réduite. Elle a une épaisseur de l'ordre de quelques mètres.

PARTIE 2 : MESURE DE LA CONDUCTIVITE HYDRAULIQUE GRACE AUX ONDES DE MAREES

Dans cette partie nous présentons une méthode de mesure de la diffusivité d'un milieu. Nous ne concentrons comme précédemment sur le cas de l'île de Santa Cruz.

A- MODELE

On considère dans cette partie un aquifère semi-infini avec une nappe phréatique non confinée. Le substratum est à l'altitude $z=0$. On considère également que la conductivité hydraulique K , la porosité ϵ et la masse volumique du fluide ρ sont constantes. On se place dans les hypothèses de Dupuits : tous les flux sont horizontaux. On note $h(x,t)$ la charge de la nappe, qui est donc ici égale à la hauteur d'eau. On ne se place pas dans l'hypothèse de stationnarité.

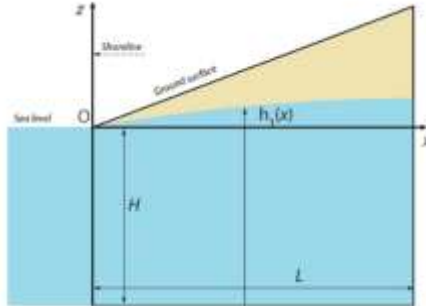


Figure 13 - Modèle

Notons bien qu'ici on considère pour simplifier un système monophasé. On considère que l'aquifère est uniquement constitué d'eau de mer, cela évite notamment de considérer tous les phénomènes de réflexion, et réfraction à l'interface eau douce-eau salée dus à la différence de masse volumique. Nous avons vu dans la première partie, que la nappe d'eau douce est très réduite. On peut donc la négliger dans notre modèle. Il faudra toutefois vérifier qu'on aboutit à la fin à une valeur de la conductivité hydraulique cohérente avec cette hypothèse de nappe d'eau douce négligeable.

L'équation de diffusion s'écrit dans ce cas-là : $Kh \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial h}{\partial t}$

On note h_0 l'altitude de la nappe à l'état statique. On peut réécrire la charge h sous la forme :

$$h(x, t) = h_0(x) + h'(x, t)$$

L'équation de diffusion peut s'écrire sous la forme : $D \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = \frac{\partial h'}{\partial t}$ où D est la diffusivité : $D = \frac{Kh}{\epsilon}$

B- FORÇAGE PERIODIQUE

Les vagues imposent un forçage périodique sinusoïdal en $x=0$, d'où : $h'(0, t) = h_0' e^{i\omega t}$ où h_0' est l'amplitude de la marée et $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ la fréquence de la marée avec $\tau = 12,46 \text{ h}$. On cherche une solution à l'équation de diffusion sous la forme : $h'(x, t) = f(x)e^{i\omega t}$. On reporte la forme de la solution dans l'équation de diffusion. On obtient : $D f''(x)e^{i\omega t} = i\omega f(x)e^{i\omega t}$. En simplifiant l'équation ainsi obtenu par $e^{i\omega t}$, on obtient l'équation différentielle suivant : $f'' - \frac{i\omega}{D} f = 0$. On obtient : $f(x) = A e^{\sqrt{\omega/2D}(1+i)x} + B e^{-\sqrt{\omega/2D}(1+i)x}$. Or, en utilisant les deux conditions aux limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0$ (l'onde s'atténue avec la distance) et $h'(0, t) = h_0' e^{i\omega t}$, on obtient $A=0$ et $B=h_0'$.

Donc $h'(x, t) = \text{Re} \left(h_0' e^{-\sqrt{\omega/2D}x} e^{i\omega t - \sqrt{\omega/2D}ix} \right)$ soit : $h'(x, t) = h_0' e^{-\sqrt{\omega/2D}x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2D}x)$. A la distance x de la côte, le signal est atténué du paramètre $\alpha = e^{-\sqrt{\omega/2D}x}$ et déphasé du paramètre $\varphi = \sqrt{\omega/2D}x$.

C- MESURE DE LA DIFFUSIVITE SUR L'ILE DE SANTA CRUZ

Alexandre Pryet présente dans sa thèse une étude sur l'île de Santa Cruz qui a permis de déterminer la valeur de la conductivité thermique de l'aquifère grâce au forçage des marées. Des mesures de pression ont été simultanément réalisées à Puerto Ayora, ville située au bord de la mer, et à un puits de forage situé plus loin de la côte.

Les signaux récupérés sont ainsi traités :

- Interpolation par splines (fonction polynomiale par morceaux) des valeurs de la pression pour chaque minutes alors qu'elle est mesurée toutes les heures ou tous les quarts d'heure
- Les interférences sont enlevées ou lissées

- La hauteur d'eau est déduite de la pression
- Un filtre passe-haut est appliqué afin de récupérer uniquement le fondamental du signal associé à la période temporelle $\tau = 12,46 h$. Puis le signal est stocké avec une fréquence de 5min pour éviter le gaspillage de mémoire

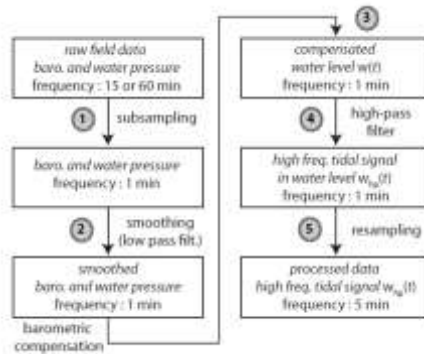


Figure 14 - Processus de filtration du signal

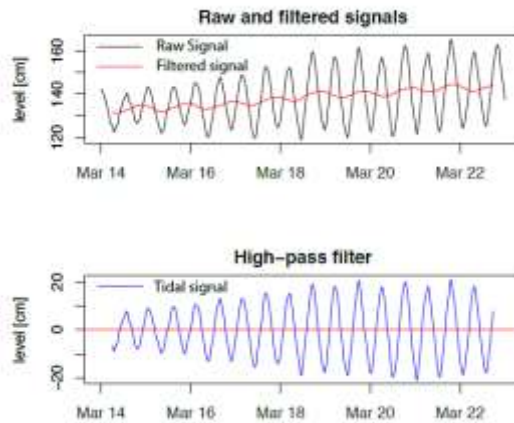


Figure 15 - Signaux de marées : en rouge signal brut, en noir signal après un premier traitement, en bleu signal traité

On compare ensuite les signaux mesurés à Puerto Ayora et au puits de forage pour déterminer le facteur d'atténuation et le déphasage.

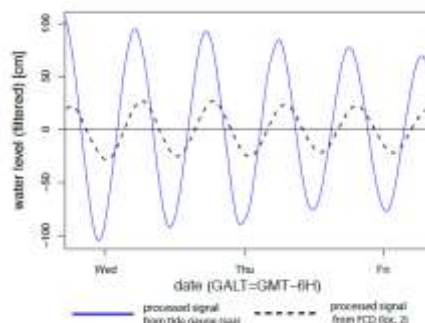


Figure 16 - Signaux à Puerto Ayora (en bleu) et au puits de forage (en noir)

Il y avait deux puits de forage à $x=175m$ et $x=729m$. On obtient après mesure de l'atténuation et du déphasage dans chacun des deux cas $D=144m^2/s$ et $D=143m^2/s$.

On sait que la conductivité hydraulique est donnée par $K \approx \frac{D\varepsilon}{H}$ où H est la hauteur du substratum. On considère ici que $H=1000m$. La porosité est estimé à $\varepsilon=0.1$. On obtient : $K = 1.4 * 10^{-2}m/s$

D- CONCLUSION

Il s'agit d'une valeur élevée. En effet, classiquement, les valeurs oscillent entre 10^{-9} et 10^{-2} m/s. Le milieu est très diffusif. L'eau de mer se propage facilement dans l'aquifère. On peut s'attendre qu'il y ait peu d'eau douce. Cela confirme les résultats donnés par les modèles de la partie précédente. De plus, cela confirme que la couche d'eau douce est très faible et valide notre choix de modèle monophasique pour le calcul de la conductivité hydraulique.

BIBLIOGRAPHIE

- *Hydrogeology of the Galapagos Archipelago: an integrated and comparative approach between islands*, A. PRYET & al., 2007
- *Hydrogeology of volcanic islands: a case-study in the Galapagos Archipelago*, A. PRYET, Thèse de Doctorat de l'Université de Pierre et Marie Curie, 2006
- *A Note on the Ghyben-Herzberg formula*, Arnold VERRUIJT, TU Delft, 1968
- *Cours d'hydrologie*, Ghislain DE MARSILY, Edition de l'Ecole polytechnique, 2012